

Fokasz Nikosz

Növekedési görbék, társadalmi diffúzió, társadalmi változás¹

1. Bevezetés

Egy korábbi publikációnkban² kísérletet tettünk annak vizsgálatára, hogy miként lehetne az írott sajtóban, valamely témában megjelenő cikkek számának időbeli dinamikáját matematikai modellek segítségével megragadni. Az apropót az úgynevezett „Tilos ügy” szolgáltatta. Az ügy kapcsán kibontakozó páratlanul heves médiakampány láttán támadt az a benyomásunk, hogy a kérdéses téma úgy árasztotta el a médiát, mint valamely fertőző betegség a ragályra fogékony populációt. Arra gondoltunk ezért, hogy a Tilos ügyben publikált cikkek számának időbeli dinamikáját - mintegy, „*lássuk mire megyünk vele*” alapon - a fertőzési folyamatok megragadására szolgáló modellek legismertebbjevel a logisztikus függvény segítségével próbáljuk megragadni.

Már akkor világos volt azonban, hogy vizsgálatunkat két irányba, *tematikailag* és *módszertanilag* is ki kell terjesztenünk. Jelen tanulmányunkban második úton haladunk tovább. Áttekintjük ezért a társadalmi diffúzió elemzésében szerepet játszó növekedési függvények minél teljesebb osztályát, elméleti alapjaikat, valamint ma már igen kiterjedt társadalomtudományi alkalmazásait.

2. Korai kezdetek, a logisztikus leképezés

Ha minden hónapban fix összegű zsebpénzt adunk gyermekünknek, aki ezt gondosan félre is teszi, akkor megtakarítása egy idő után már igazán szép summát tehet ki. Megtakarításának havi gyarapodása azonban egyáltalán nem függ attól, hogy éppen sok vagy kevés pénze van-e. Félre tett pénze a folyamat kezdetén éppúgy, mint bármely későbbi szakaszában ugyanazzal az általunk biztosított fix összeggel, következőképpen *lineárisan* fog növekedni. Más a helyzet akkor, ha pénzünket, mondjuk valamilyen meghatározott összeget, tartósan egy bankban helyezzük el. A kamat révén ott a pénz, pénz *fial* ezért a mindenkori növekmény függ attól, hogy mekkora a bankban éppen kamatozó, azaz ennyiben ott „*szaporodó*” pénz. Általában is elmondható, hogy valamely „szaporodási” folyamat esetében a kérdéses

¹ A tanulmány a TO43655 számú OTKA kutatás keretében készült

² Fokasz Nikosz és Fokasz Oresztész: Hullámverés, Szociológia Szemle, 2004/4

„populáció” pillanatnyi \dot{N} növekménye függ valamiképp attól, hogy éppen mennyi a populáció pillanatnyi N létszáma³:

$$\dot{N} = f(N) \quad (1)$$

Több mint kétszáz éve már, hogy Malthus (1798) azzal az ötlettel állt elő, hogy az emberi populáció szaporodása esetében is hasonló szabály érvényesülhet. Konkretizálva az (1) összefüggést, azt feltételezte, hogy a populáció méretében bekövetkező változás a populáció mindenkor méretével arányos, azaz:

$$\dot{N} = rN \quad (2)$$

Világos, hogy (2)

$$r = \frac{\dot{N}}{N}$$

alakra hozható, ahol r nem más, mint az N mennyiség relatív megváltozása, más szóval a populáció úgynevezett belső növekedési üteme. Ha r konstans, akkor a kérdéses emberi populáció növekedési üteme állandó, azaz

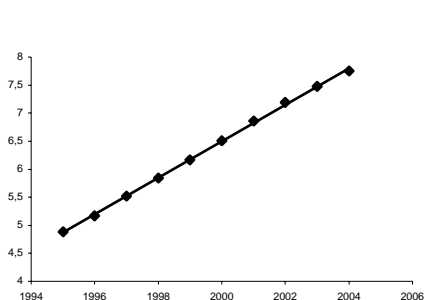
$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (3)$$

alakú *exponenciális* függvénnyel írható le. Világos persze, hogy valamely népesség csak addig követheti ezt a saját belső tulajdonságainak engedelmessé növekedési szabályt, amíg erőteljesebb külső tényezők ettől el nem térítik. A (2) szabály által leírt növekedési modell ezért leginkább olyan populáció esetében érvényesülhet, amely kellően nagy térségekben szaporodik.

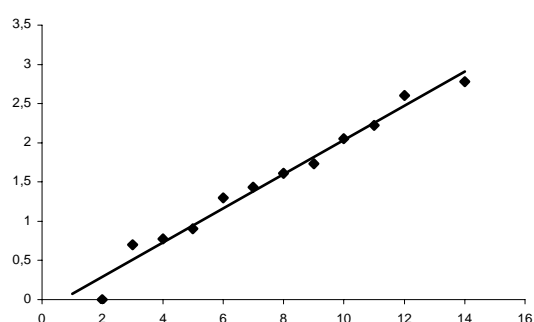
Új, egyelőre tehát még üres terek – s ezzel együtt a határtalan növekedés lehetőségének érzete – napjainkban leginkább az infokommunikációs technológiák, a személyi számítógépek, a mobil telefonok és különösen az Internet megszületése jóvoltából

³ Megjegyezzük, hogy \dot{N} valójában az N populáció létszám idő szerinti deriváltját jelöli. Tisztában vagyok persze azzal, hogy a derivált fogalmának használata nem magától értetődő egy szociológusoknak szánt tanulmányban. Ezt rendkívül sajnálatosnak tartom, és nem matematikai, hanem olyasféle szakmai műveltségbeli hiányosságnak tartom, mintha valaki mondjuk, úgy akarná művelni a szociológiát, hogy nem tud legalább olvasni angolul. A derivált ugyanis a változó mennyiségek pillanatnyi változásának mérésére alkalmas eszköz, így az időben változó jelenségek vizsgálata jószérivel lehetetlen a derivált fogalmának legalább heurisztikus ismerete nélkül. A továbbiakban ezért legalább ezen a szinten ismertnek kell tételeznem ezt a fogalmat.

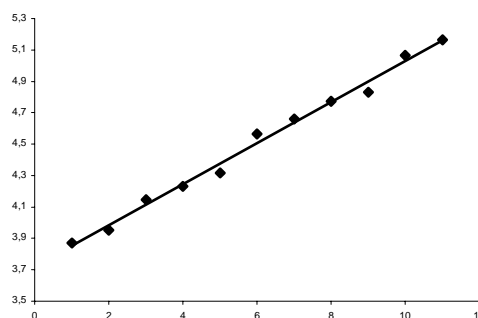
keletkeztek. Ennek jele például, hogy az Internet kapcsán sokan, sokáig és számos területen feltételezték valamilyen exponenciális duplázódási törvény létét. Elég Gordon E. Moore 1965-ben megfogalmazott törvényére emlékeztetnünk, amely az azt következő tíz évre a chippek teljesítményének évenkénti megduplázódását prognosztizálta. Az előrejelzés bejött, de a következő időszakra Moore már valamivel hosszabb, 18 hónapos duplázódási periódussal számolt. Még napjainkban is exponenciális növekedés figyelhető meg azonban a merevlemezek kapacitásának, a számítógép processzorok teljesítményének, vagy például az Internet használók számának alakulásában⁴ (2-4. ábra).



2. ábra
Merevlemez kapacitás alakulása a világban 1995-2004
(forrás Coffman, K.G. és tsa 2001)



3. ábra
Intel processzorok kapacitásának alakulása
(forrás Coffman, K.G. és tsa 2001)

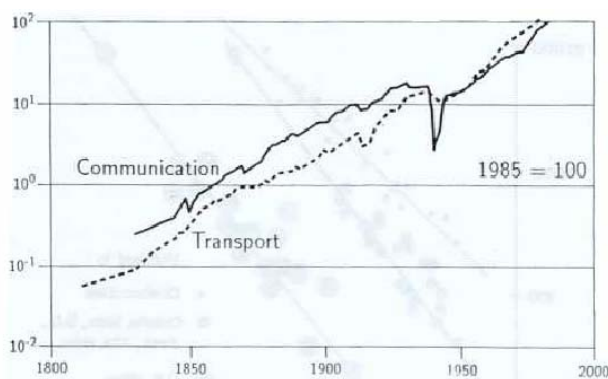


4. ábra
Szélessávú Internet előfizetések száma Magyarországon
2000 negyedik és 2003 második negyedéve között

Napjainkban igen sok szó esik arról, hogy a kommunikációs technológiák fentebb illusztrált robbanásszerű elterjedése által lehetővé vált új szolgáltatások sok tekintetben kiválthatják, helyettesíthetik az emberek fizikai mozgását biztosító közlekedési szolgáltatásokat. Hogy így

⁴ A továbbiakban az exponenciálisnövekedést mindig logaritmikus skálán ábrázoljuk, a diagramokon ezért fogunk egyeneseket látni.

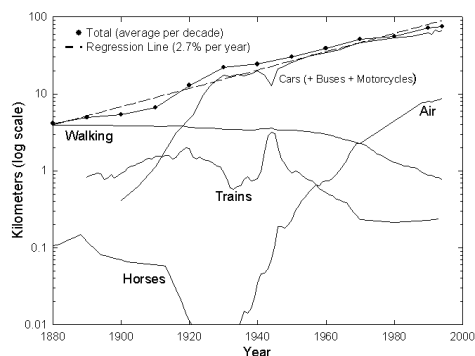
lesz-e vagy sem az egyelőre nyitott kérdés. Ennek lehetőségét mindenesetre egy kissé csökkenti az a rendkívül figyelemre méltó tény, hogy a közlekedési és kommunikációs teljesítmény az elmúlt mintegy másfél évszázadban egymással párhuzamosan, tehát egymást kiegészítve és nem helyettesítve rendkívül hasonló exponenciális növekedési pályát követett. Hajlamosak vagyunk azt feltételezni, hogy az 5. ábra diagramjai nagy tehetetlenségű, következésképpen nehezen változtatható társadalmi folyamatokra utalnak.



5. ábra

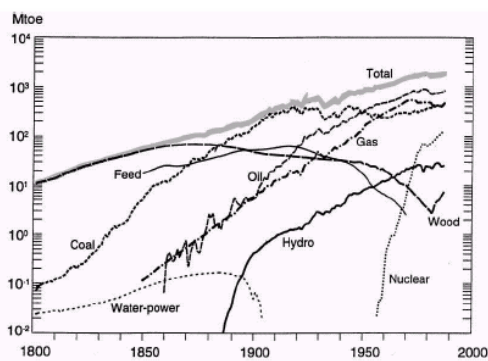
Az utaskilométerben mért közlekedési, és az üzenetek váltások számával mért kommunikációs teljesítmény alakulása Franciaországban

Persze ahhoz, hogy az exponenciális növekedés ilyen hosszabb idő távlatában is fennmaradjon nem feltétlenül szükséges, hogy valamely szaporodó „populációnak” már a kezdet kezdetén hatalmas üres tér álljon a rendelkezésre. Elegendő, ha ez a tér – persze kellő időben, és kellő ütemben, - csupán menetközben bővül. A 6. ábráról például jól látható, hogy az Egyesült Államokban egy ember által naponta gyalog, lovon, vagy vonaton megtett átlagos távolság az elmúlt száz évben inkább csökkent, mint stagnált. Az új közlekedési eszközök, a különböző közúti járművek például az autók, a buszok majd még inkább a repülőgépek egymást követő megjelenése jóvoltából azonban nyilvánvalóan olyan utakra is elindulhatunk, amelyeket korábban egyáltalán nem tettünk volna meg. Az új eszközök egymást követő megjelenése folyamatosan növeli tehát a közlekedés terét, s ebből adódik, hogy egy ember által naponta az összes lehetséges közlekedési eszközzel megtett teljes távolság, több mint száz éven keresztül figyelemre méltó stabilitással exponenciálisan növekedhetett. A 7. és 8. ábrák hasonló „térbővítő” mechanizmus létéről tanúskodnak a különböző energiaforrások felhasználása terén is.



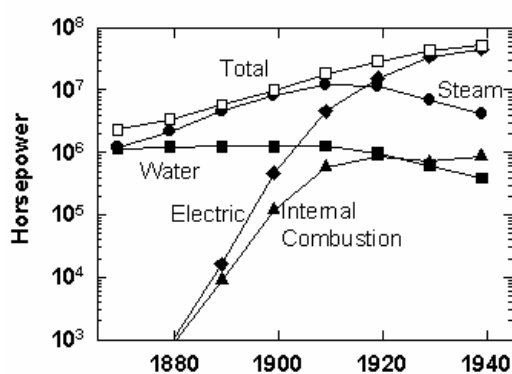
6. ábra

A különböző közlekedési eszközökkel naponta megtett, egy főre jutó utaskilométerek száma az Egyesült Államokban



7. Ábra

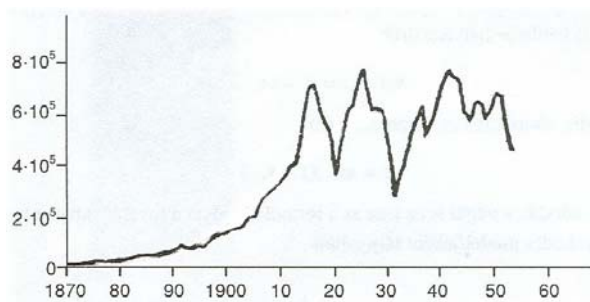
Elsődleges energiaforrások felhasználása az Egyesült Államokban



8. ábra

Elektromos energiaforrások felhasználása az Egyesült Államokban

Akárhogy is, a tér lehet eleve nagy, még növekedhet is, igazán tartós exponenciális növekedés mellett azonban előbb-utóbb mindenképpen elfogy. Lényegében erre a forgatókönyvre építettek a Római Klub felkérésére 1972-ben írt jelentésükben Dennis Meadows és szerzőtársai, akik a régi malthusi állítást azzal egészítették ki, hogy saját belső tulajdonságai miatt az ipar is exponenciális növekedést követ. Könyvük harminc évvel későbbi, átdozott és bővített kiadásában már tényként kezelik, hogy az emberiség úgynevezett *ökológiai lábnyoma* már túlnőtt a Föld méretein. A Föld, mint az emberi aktivitás tere szűk lett, a folyamat „*túllőtt*” a növekedés szükségképpen meglévő határain, így tovább nem folytatható. Hogy az ökológiai tér és a gazdasági aktivitás viszonya a jövőben miként alakulhat, bár sok jóval nem biztathatjuk magunkat, pontosan nem tudhatjuk. A 9. ábrán mindenesetre, egy nagyon egyszerű példa, a cinktermelés alakulásának segítségével illusztráljuk, hogy az erősödő külső kényszerek milyen szabálytalan visszaesésekkel, sőt válságokkal tarkított pályára kényszeríthetnek egy eredetileg exponenciálisnak indult növekedést.



9. ábra

A túlfutás lehetséges forgatókönyve

Forrás Solla Price: Kis tudomány - Nagy tudomány

Hogy az exponenciális növekedés hosszabb távon folytathatatlan egyáltalán nem új felismerés. Voltak, akik ezt már a 19. században is jól tudták. Az igazi kérdés azonban az volt, hogyan lehet az exponenciális növekedést úgy módosítani, hogy abba már beépüljenek a növekedés határai. Mások mellett Alphonse Quetelet (1795-1874) a csillagászból lett statisztikus és társadalomtudós is számos alternatív változattal kísérletezett. S bár a megoldást nem találta, mégsem hiába foglalkozott a kérdéssel.. Ő hívta fel ugyanis a problémára Pierre-Francois **Verhulst** (1804-1849) belga matematikus figyelmét, aki 1838 és 1847 között publikált három cikkében mutatta be később óriási karriert befutott megoldását.

Verhulst abból indult ki, hogy minden stabil populáció rendelkezik egy rá jellemző K saturációs szinttel. Ahhoz, hogy e felső korlátot is figyelembe vehesse egy $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ korrekciós taggal egészítette ki az exponenciális növekedés (2)-ben megadott modelljét, s így jutott az

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (4)$$

formulához. A modellt már a legelső cikkében is konkrét alkalmazásokkal, Franciaország, Belgium és Oroszország népességére vonatkozó előrejelzésekkel tesztelte, 1845-ben publikált második cikkében pedig bevezette a ma már közismert *logisztikus* növekedés elnevezést is.

Világos, hogy a növekedési folyamat kezdeti szakaszában, amíg tehát az N még kellően kicsi, az $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ korrekciós tag értéke közel eggyel egyenlő, így a (2) exponenciális és a (4) logisztikus növekedés eltérése rendkívül kicsi lehet. Az N növekedésével azonban az

$\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ korrekciós tag egyre kisebb lesz, ami miatt a növekedési ütem fokozatosan egészen addig csökken, amíg a K saturációs szint elérésekor a növekedés teljesen le nem áll.

Verhulst-nek a (4) formulával tehát csakugyan sikerült egy korlátozott térben lezajló növekedési folyamat modelljét megalkotnia. Sikere azonban nem volt tartós. A társadalomtudósok hamar elfelejtették a modellt és megalkotóját is. A függvény a 19. század végén a kémikusoknak, s különösen az autokatalitikus kémiai folyamatok felfedezéséért 1909-ben kémia Nobel díjjal jutalmazott⁵ Wilhelm Ostwaldnak (1853-1932) köszönhetően élt tovább, persze *autokatalitikus függvény* néven. Mint ilyet fedezi fel újra 1920-ban a demográfia számára az amerikai R. Pearl, és L.J. Reed, akik a modellt az Egyesült Államok népességének előrejelzésére alkalmazták. Verhulst nevét és elsőségét csak egy 1922-es következő cikkükben említik meg, s akkor is csak egy lábjegyzet erejéig. Ők maguk a későbbiekben a modellt igen kiterjedten, számos populáció – gyümölcslegykolónia, Észak-Afrikai francia gyarmatok, sárgadinnye telepek – növekedésének elemzésére alkalmazták. G. U. Yule az, aki 1925-ben feleleveníti a logisztikus növekedés elnevezést, s a modell végül is ezen a néven kezdi meg társadalomtudományi diadalmenetét. Mivel ez a siker egyáltalán nem független a modell és a belőle adódó függvény matematikájától, a továbbiakban ezt vesszük egy kicsit közelebből szemügyre.

3. A logisztikus leképezés matematikája

Az előzőekben már láttuk, hogy a logisztikus növekedési szabályt leíró

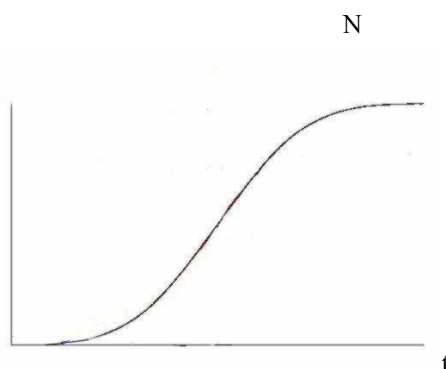
$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (5)$$

differencegyenletet riasztó külseje ellenére sem volt igazán nehéz megfejtenünk. Ehhez hasonlóan, az (5) modell megoldása az

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{-rt-b}} \quad (6)$$

háromparaméteres függvényⁱ is csak első pillantásra tűnik bonyolultnak. A (6) formula által megadott függvény ugyanis tipikus esetben – azaz ha a kiinduló érték kisebb K-nál - egy szabályos S-görbét formázⁱⁱ.

⁵ „in recognition of his work on catalysis and for his investigations into the fundamental principles governing chemical equilibria and rates of reaction”



10. ábra
A logisztikus függvény

A (6) formulában szereplő paraméterek közül, a K -ról már eddig is tudtuk, hogy a saturáció szintjét, az r -ról pedig, hogy az úgynevezett belső növekedési ütemet jelöli. A képletben az egyedüli újdonság a b paraméter, amely egyfajta helyzetparaméterként funkcionál, azaz a függvénynek a t időtengely mentén való elhelyezkedését határozza meg, anélkül, hogy az alakját befolyásolná. Ha $r > 0$ akkor logisztikus *növekedéssel* van dolgunk, ha $r < 0$ akkor logisztikus *csökkenéssel*. Azt hihetnők, hogy csak az első eset az igazán érdekes, de számos példát fogunk még látni arra, hogy ez nem feltétlenül van így.

Ahogy a 10. ábrán is látható, a növekedés lassú kezdés után egy darabig folyamatosan gyorsul. Egy adott pontban azonban a függvénynek inflexiós pontja van, ami után a növekedés fokozatosan addig lassul, amíg a folyamat „végén” le nem áll. Egy adott időpillanatban tehát az

$$\frac{\dot{N}}{N} = r \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

növekedési ütem valamilyen maximális⁶ értéket ér el. Hogy a folyamat milyen gyorsan éri el ezt a pontot, az az r paraméter értékétől függ. Az viszont az r -tól független, hogy ez a pont mindig a saturációhoz vezető félúton, tehát mindig $\frac{K}{2}$ populációnagyság mellett következik be.

A 10. ábráról látható, hogy egy logisztikus függvény által leírt növekedési folyamat kezdeteit keresve egyre jobban el kell merülnünk a múltban, a folyamat vége pedig valahova a távoli jövőbe vész. Ebben az értelemben mondhatjuk, hogy egy ilyen folyamat a mínusz végtelenben kezdődik és a plusz végtelenben ér véget. Pontos kezdete és vége ezért nem jelölhető ki. Értelmes – mert megválaszolható – kérdés azonban, hogy a folyamat egy kezdeti,

⁶ A függvény meredeksége, azaz deriváltjának értéke itt a maximális.

mondjuk a saturáció 10%-át kitevő szintjéről mennyi idő alatt jut el egy érett szakaszába, mondjuk a saturáció 90%-át kitevő szintre. Beláthatóⁱⁱⁱ, hogy ha Δt jelöli ezt az időtartamot, akkor fennáll az

$$r = \frac{\ln 81}{\Delta t} \quad (7)$$

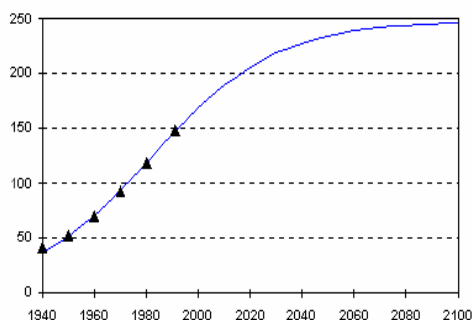
összefüggés, vagyis az r paraméter helyettesíthető ezzel az újabbal. Hasonlóan könnyen levezethető^{iv}, hogy ha t_m jelöli az inflexiós pont bekövetkezésének idejét, (az m index itt a midpoint kifejezésre utal) akkor

$$t_m = -\frac{b}{r}. \quad (8)$$

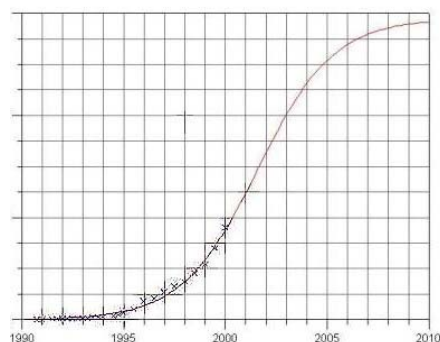
Ha a most kapott Δt és t_m paramétereket helyettesítjük be az eredeti r , és b paraméterek helyébe akkor (6) a következő alakot ölti:

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{-\frac{\ln 81}{\Delta t} t + \frac{\ln 81}{\Delta t} t}} = \frac{K}{1 + e^{-\frac{\ln 81}{\Delta t} (t - t_m)}} \quad (9)$$

A most kapott formula is csak látszólag bonyolult. A benne szereplő három paraméter ugyanis a leghétköznapibb tapasztalat számára is könnyen átlátható, s megérthető. A jól ismert K saturációs szint képviseli azt a felső korlátot, plafont, amelyet a növekedési folyamat nem léphet át. Metaforikusan szólva ez fejezi annak a „térnek” a nagyságát, amely a kérdéses „szaporodó populáció” számára megadatott. Hasonlóan könnyen interpretálható a Δt növekedési idő, és a t_m középpont is. Ráadásul az adatokból mindhárom paraméter nagysága már jóval a folyamat teljes lefutása előtt megsejthető, ami az empirikus illesztéseknél különösen hasznos lehet. Magunk is ezeket a tulajdonságokat használtuk fel a Tilos Rádiós illesztéseknél, s emiatt lehet Brazília népességi adataira vagy az Internet host-ok számának alakulására - annak ellenére, hogy a folyamatok még alig-alig jutottak túl a középpontjukon - olyan nagy biztonsággal logisztikus függvényt illeszteni (11.–12. ábra).



11. ábra
Brazília népességének alakulása, millió fő



12. ábra
Az Internet host-ok számának alakulása

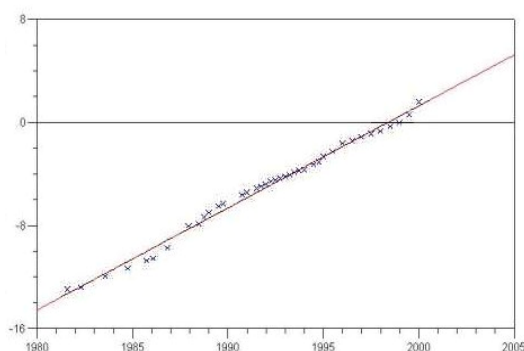
A logisztikus függvény empirikus alkalmazása tehát semmiképpen sem nagy ördögösség, dolgunkat azonban egy egyszerű trükk bevetésével még tovább könnyíthetjük. Mindennapos tapasztalat, hogy valamely diagram alapján ránézésre elég nehéz, ha nem lehetetlen megmondanunk, hogy egy görbe pontosan milyen függvénynek is felel meg. A másod-, harmad-, netán negyedfokú, vagy éppen exponenciális függvények grafikonja között ránézésre nem igazán tudunk különbséget tenni. Azt viszont első pillantásra is el tudjuk dönteni, hogy bizonyos pontok egy egyenesre illeszkednek-e vagy sem. Ezért találták ki azokat a trükköket, amelyekkel a legkülönbözőbb függvényeket linearizálni lehet. A 2-8. ábrák mindegyikén mi magunk is többszörösen éltünk a jól ismert lehetőséggel, hogy ha a függőleges tengelyen logaritmikus skálát használunk, akkor az exponenciális növekedés grafikonja egyenes lesz. Ugyanezt a hatást érhetjük el hatványfüggvény esetében, ha mindkét tengelyen logaritmikus skálát használunk. Ezt az eljárást napjainkban előszeretettel alkalmazzák a fraktálok és a skálafüggetlen hálózatok vizsgálatokor.

Kicsit bonyolultabb, de megoldható a logisztikus függvény linearizálása is. A Fisher-Pry transzformációként ismert eljárás lényege a következő (Fisher, J.C., és tsa.1971). Ha F jelöli annak arányát, hogy az N éppen hol tart a K saturációhoz képest, azaz $F = \frac{N}{K}$, akkor belátható^v, hogy fennáll az

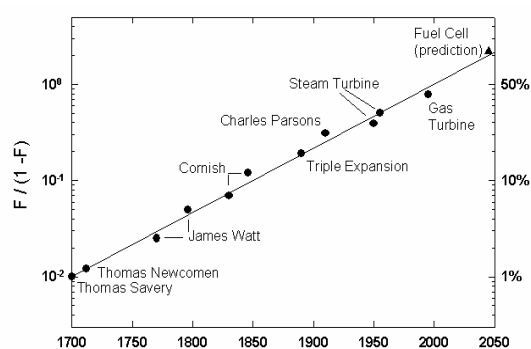
$$\ln \frac{F}{1-F} = rt + b \quad (10)$$

összefüggés, vagyis ha N logisztikus függvény akkor az $\frac{F}{1-F}$ kifejezést logaritmikus skálán ábrázolva egyenest kell kapjunk. Az egyenes meredeksége pedig, mint látható éppen az r belső növekedési ütemmel egyezik meg.

A módszer illusztrálása kedvéért mutatjuk be a 13-14. ábrák diagramjait. Az előbbiben a 12. ábra S-görbéjének adatait vetettük alá a fenti transzformációnak, és így jutottunk a 13. ábra látványosan lineáris pontdiagramjához. Erről is leolvasható, hogy az Internet host-ok számának alakulását olyan logisztikus növekedés írja le, amely az inflexiós pontot 2000 körül érte el, a saturációt pedig 2010 táján közelíti meg. Ezek az eredmények egyébként rímelnék mások, többek között Theodor Modis (2005) eredményeivel is, aki úgy találta, hogy lényegében túl vagyunk az Internet felhasználók számának első hirtelen növekedési hullámán. A folyamat ugyanis szerinte olyan logisztikus függvénnyel ragadható meg, amely a saturációs szintet a világ népességének mintegy 14%-án 2010 körül éri majd el. Ez a világszerte persze nagyon nagy regionális eltéréseket takar. A jelenlegi folyamatok alapján az USA esetében a saturációs szint a népesség 68%-át, az EU-ban pedig 48%-át teszi ki, míg a világ többi részére rendkívül alacsony mintegy 9%-os saturációs szint adódik.



13. ábra
Az Internet host-ok számának alakulása,
Fischer-Pry transzformációval



14. ábra
A gőzgépek hatékonyságának alakulása az USA-ban
Forrás: Ausubell, Marchetti, Meyer

A fent bemutatott alkalmazásokból világos, hogy a logisztikus függvény egyszerű, könnyen interpretálható paramétereinek és elegánsan szimmetrikus grafikonjának köszönheti népszerűségét. Láttuk, hogy a logisztikus függvény esetében az inflexiós pont éppen középen van, a saturáció szintje pedig már a kezdet kezdetén, a növekedési folyamat legelején eldőlt. A logisztikus növekedés tehát megejtően elegáns formában oldja meg a valamilyen saturációhoz, más szóval telítődési szinthez tartó folyamatok leírásának, megragadásának problémáját. Éppen ez az elegáns szépség lehet azonban a hátránya is. A világ a tudósok szemében sokszor bizonyult alapvetően egyszerűnek, néha tán még elegánsnak is, de ez nem mindig van így. Ugyan miért is lenne? Itt az ideje ezért, hogy olyan kísérletek után nézzünk,

amelyek más úton közelítik meg a telítődési szinthez tartó növekedési folyamatok megragadásának kérdését.

4. Egyéb korai kísérletek

Időben kétségtelenül egy brit autodidakta matematikus Benjamin **Gompertz** (1779-1865) próbálkozása tekinthető a legelsőnek. Az általa megalapozott úgynevezett túlélési analízis, amelyet ma talán a biztosítási matematika egyik ágának tekinthetnénk tulajdonképpen azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy bizonyos egyedek mennyi ideig tartózkodnak egy meghatározott állapotban, és milyen eséllyel lépnek át egy rákövetkezőbe. Az „élünk és meghalunk” játék, ennek csak egy - igaz meglehetősen karakteres - speciális esete. A kiindulópont a malthusi (2) formulához kísértetiesen hasonló

$$\dot{N} = -rN \quad (11)$$

összefüggés, azzal a különbséggel, hogy az r paramétert ezúttal valamilyen, az egyes egyedek „túlélését” befolyásoló kockázati tényezőként interpretáljuk. Ha r konstans, akkor a populáció létszáma nyilvánvalóan exponenciálisan csökkenő

$$N(t) = N_0 e^{-rt}$$

alakú pályát fut be. Ésszerűbb azonban azt feltételeznünk, hogy az idő előrehaladtával a kockázati tényező inkább nő. Gompertz például, 1825-ben írt tanulmányában abból indult ki, hogy, az r exponenciálisan nő, azaz

$$r = ke^{at} \quad (12).$$

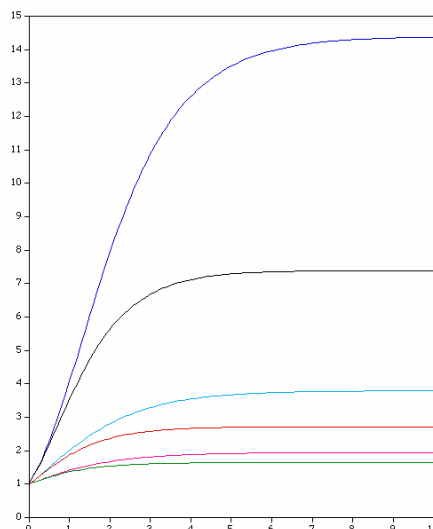
Ezt behelyettesítve az eredeti (11) formulába,

$$\dot{N} = -ke^{at} N \quad (13)$$

adódik, aminek megoldása^{vi} az

$$N(t) = Ke^{-be^{-at}} \quad (14)$$

függvény lesz. Belátható, hogy a (14) formula révén is egy S-görbét formázó függvényhez jutottunk (15. ábra). A logisztikus függvénytől eltérően azonban ez a görbe nem szimmetrikus. Az inflexiós pontja előrébb van, s mintegy a saturáció egyharmadánál következik be.



15. ábra

A Gompertz függvény alakja különböző paraméterértékek mellett

Korai megalkotása ellenére a Gompertz függvény társadalomtudományi alkalmazásai messze elmaradtak a logisztikus függvény mögött. Ebben talán éppen a matematikai elegancia hiánya és viszonylagos bonyolultsága játszhatott szerepet. Ezzel szemben kiterjedten használták és a mai napig is használják a populációbiológiában. A populációdinamika speciális esetének tekinthető a daganatos sejtek szaporodásának vizsgálata, amely szintén kiterjedt alkalmazási területe a Gompertz függvénynek (Kozuko, F. és tsai 2003). A társadalomtudományokba elsősorban a demográfián keresztül, legújabbán pedig az innováció-diffúzió elemzése révén szivárgott vissza. Erről később majd még részletesebben beszélünk. Nagyon sokszor előfordul, hogy a logisztikus függvénnyel együtt, azzal összehasonlítva alkalmazzák a legkülönbélebb élőlények, fajok (Liao C. Y., és tsai 2003.), illetve állatok például disznók (Wellock I.J. és tsai 2004.), vagy szarvasmarhák (Kratochvilová és tsai 2002) egyes egyedei növekedésének mérésére.

Ezzel azonban már át is léptünk egy másik S-görbe az úgynevezett **Bertalanffy**-függvény alkalmazásának területére, amelyet 1938-ban pontosan arra alkottak meg, hogy segítségével előre jelezzék a cápák testhosszának növekedését (Bertalanffy, L. 1938). Elégé magától értetődőnek tűnik, hogy ezúttal is valamiféle telítődési szinthez tartó növekedési folyamattal lesz dolgunk, hiszen minden cápa valamilyen nem nulla N_0 születési testhosszal jön a világra, majd fokozatosan növekedve innen jut el a kifejlett egyed teljes K testméretéhez. Azt is feltételezhetjük, hogy a születési illetve a felnőtt testhossz közötti kezdeti $(K - N_0)$ különbség fokozatosan, mondjuk a példa kedvéért exponenciálisan, tehát

$(K - N_0)e^{-rt}$ szabályt követően cseng le. Egy cápa mindenkor $N(t)$ testhossza tehát a K végleges testhossztól való eltérésként definiálható, azaz a testhossznak az életkortól való függését az

$$N(t) = K - (K - N_0)e^{-rt} \quad (15)$$

összefüggéssel írhatjuk le.

A fenti függvényt a K kiemelésével

$$N(t) = K \left(1 - \frac{K - N_0}{K} e^{-rt} \right)$$

majd

$$b = \frac{K - N_0}{K} \quad (16)$$

jelöléssel

$$N(t) = K(1 - be^{-rt}) \quad (17)$$

alakra hozhatjuk, amely a Bertalanffy-függvény talán legáltalánosabban használt formája.

A Bertalanffy-függvénynek azonban létezik egy másik, előszeretettel használt alakja is. Jelölje t_0 azt a hipotetikus időpontot, amikor a „cápák” testhossza nulla. Ebben az esetben t_0 tulajdonképpen az úgynevezett kihordási időt jelenti. Ha feltételezzük, hogy erre a „születés előtti” időszakra is a (17) szabály van érvényben, akkor $N(t_0) = K(1 - be^{-rt_0}) = 0$, ahonnan $b = e^{rt_0}$ adódik, amit (17)-ba behelyettesítve

$$N(t) = K(1 - e^{-r(t-t_0)}) \quad (18)$$

a Bertalanffy-függvény egy újabb formájához jutunk.

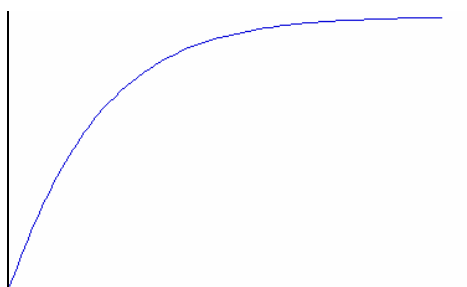
A Bertalanffy-függvény alkalmazásának további kiterjesztését teszi lehetővé, ha feltételezzük, hogy valamely élőlény L testhossza valamint M tömege között $M = L^3$ összefüggés áll fenn. A fenti formulák ebben az esetben könnyen átalakíthatók a testtömeg növekedésének megragadására is.

A 15-18 formulákkal megadott Bertalanffy-függvény, a logisztikus- és a Gompertz-függvény után sorrendben már a harmadik olyan függvény, amely valamely K telítődési szinthez tartó folyamatot ír le. A függvény alkalmazási területe igen széleskörű, születési körülményei azonban annyiban ma is hatnak, hogy különös előszeretettel alkalmazzák a haltenyésztés, és a halállományok vizsgálata terén (Grandcourt E. M., és tsai 2005). A

Bertalanffy-függvény közvetítésével még speciálisabb növekedési folyamathoz juthatunk el, ha feltételezzük, hogy a kiinduló érték éppen nulla, azaz $N_0 = 0$. Ekkor a (16)-ben szereplő paraméterre $b = \frac{K-0}{K} = 1$ teljesül, és a (17) formula az

$$N(t) = K(1 - e^{-rt}) \quad (19)$$

alakot ölti. Ez is egy saturációs szinthez tartó, lassuló ütemű növekedési folyamat, de ezúttal nem(!) S-görbe, mivel a függvénynek nincs inflexiós pontja (16. ábra).



16. ábra
Mitscherlich-függvény

A függvény grafikonja nem véletlenül emlékeztet a csökkenő hozamnövekedés törvényére. A **Mitscherlich** által fölállított összefüggést ma előszeretettel alkalmazzák, például az agrárgazdaságban. Általánosan elterjedt ugyanis az a vélekedés, hogy egy növényvel elérhető terméseredmény, valamely x növekedési tényező (például a műtrágya) adagjainak fokozásával nem lineárisan növekszik. A tapasztalat inkább azt sugallja, hogy az illető tényező újabb és újabb adagjainak növekedési hatása annál kisebb lesz, minél közelebb vagyunk az adott tényező által maximálisan elérhető K hozamhoz.. Az N terméseredménynek az x termelési tényező szerinti $\frac{dN}{dx}$ változása tehát a maximumhoz még *hiányzó* ($K - N$) termésmennyiséggel lesz arányos, fennáll ezért a

$$\frac{dN}{dx} = r(K - N) \quad (20)$$

összefüggés. Ez a differenciálegyenlet azonban, ha a független változó helyébe a t időváltozót helyettesítjük, az

$$\dot{N} = \frac{dN}{dt} = r(K - N) \quad (21)$$

alakot ölti, amelynek megoldása éppen a Bertalanffy-függvényt megadó (17) formula lesz^{vii}.

Megjegyezzük, hogy ha nem a „testhossz”, hanem a „testtömeg” növekedési szabályát akarnánk előállítani, akkor (20) módosul, és a „tömeg a testhossz köbével arányos” szabály miatt az

$$\dot{N} = rN^{\frac{2}{3}} \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \quad (22)$$

alakot ölti^{viii}.

5. Növekedési modellek

Először volt a logisztikus függvény, majd gyors egymásutánban rábukkantunk a Gompertz-, a Bertalanffy-, illetve a Mitscherlich-féle függvényekre is. Mind, valamiféle telítődési szinthez tartó folyamatot ír le, de persze mindegyik egy kicsit eltérő módon teszi. Itt az ideje ezért, hogy egy kis rendet teremtsünk közöttük.

Induljunk ki megint a logisztikus modell

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

alakú differenciálegyenletéből. Ha ezt a kifejezést az

$$\dot{N} = rN^{\alpha} \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^{\beta} \right)^{\gamma} \quad (23)$$

alakba írjuk át, akkor egyrészt semmit sem változtattunk a benne szereplő kifejezések értékén, másrészt világosan kirajzolódik a formula egy lehetséges általánosításának iránya. Ha a (22)-ben mindenütt egységnyi értéket felvevő paraméterek helyébe tetszőleges pozitív α , β , γ értéket is megengedünk, akkor az

$$\dot{N} = rN^{\alpha} \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^{\beta} \right)^{\gamma} \quad (24)$$

formula adódik. Ez persze így teljesen formális eljárás, aminek célszerűsége annál is inkább kétséges mivel tetszőleges pozitív α , β , γ értékre a fenti egyenletnek nincs is megoldása. Világos ugyanakkor, hogy ezúttal mégiscsak valamiféle általánosabb modellhez jutottunk el, hiszen (24)-ből $\alpha=1$ és $\gamma=0$ esetén az exponenciális növekedés (2) formuláját, $\alpha=\beta=\gamma=1$ mellett a logisztikus növekedés (4) egyenletét, míg $\alpha=2/3$, $\beta=1/3$, $\gamma=1$ választással a Bertalanffy-függvény (22)-ben megismert modelljét kapjuk vissza.

A (24) differenciálegyenlet azonban nem csak arra jó, hogy segítségével előállíthassunk már ismert modelleket. Lehetővé teszi, hogy újabbakat is legyárthassunk. A (22) formula mintájára például $\beta=1-\alpha$ választással igazán könnyű előállítanunk az

$$\dot{N} = rN^\alpha \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^{1-\alpha} \right) \quad (26)$$

úgynevezett általánosított Bertalanffy-féle modellt. Külön figyelmet érdemel (24)-nak az $\alpha=\gamma=1$ mellett előálló

$$\dot{N} = rN \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^\beta \right) \quad (27)$$

alakú speciális esete. Ez az a differenciálegyenlet, amelynél 1959-ben **Richards** kötött ki, aki annak idején először maga is a Bertalanffy-féle modelltől indult ki, majd annak érdekében, hogy egy a növények növekedésére is jól illeszkedő függvényt találjon végül is ezt a módosított egyenletet választotta. Ennek megoldása az

$$N(t) = H + \frac{A - H}{\left[1 + T e^{-r(t-t_m)} \right]^{\frac{1}{T}}} \quad (28)$$

függvény, egy olyan S-görbét határoz meg, amely pályáját a H alsó korlát és az A felső telítődési szint között futja be. Ezt az úgynevezett Richards-függvényt szokás általános logisztikus függvénynek is nevezni, mivel a (27) formulából $\beta=0$ esetén az exponenciális, $\beta=1$ mellett a logisztikus, míg $\beta=-1$ választással a Mitscherlich modellhez jutunk. A fentieknél egy kicsit bonyolultabb eljárással, de a (27) formula módosításaként adódó

$$\dot{N} = \frac{r}{\beta} N \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^\beta \right) \quad (29)$$

modellből még a **Gompertz**-függvény is levezethető, ebből ugyanis $\beta \rightarrow 0$ határátmenettel

$$\dot{N} = rN \ln \left(\frac{N}{K} \right) \quad (30)$$

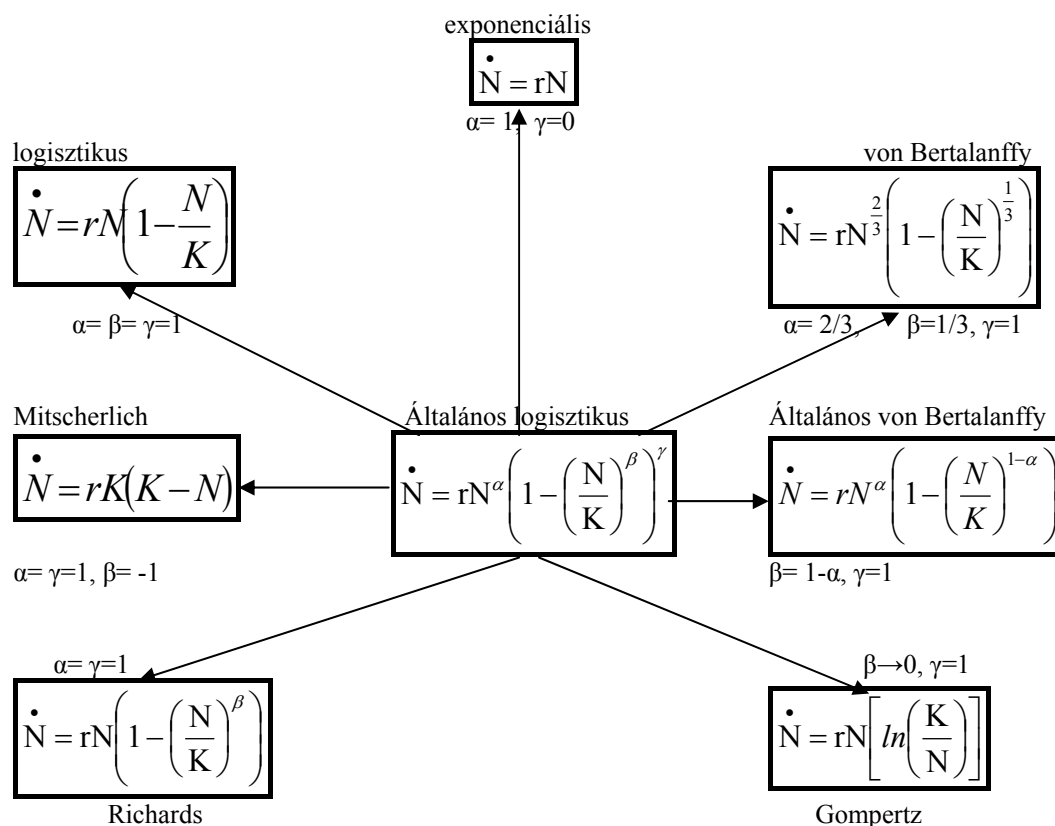
adódik^{ix}, amelyről belátható^x, hogy ekvivalens a Gompertz modellel, s megoldása

$$N(t) = K e^{-be^{-rt}}$$

a már jól ismert Gompertz-függvény.

A fentiekben ezért követettük a különböző növekedési modellek számbavételének erősen formális eljárását, hogy megkönnyítsük kapcsolataik áttekintését, valamint, hogy bemutassuk egy többé-kevésbé gépies „modellgyártó” eljárás lehetőségét is. Bár ezzel a

módszerrel még számos más modell is előállítható lenne, mi ezen a ponton úgy tekintjük, hogy az eddigiekkel már átvergődtünk tanulmányunk matematikai részén, s eredményeinket a 16. ábrában foglaljuk leltárárszerűen össze.



16. ábra
Növekedési modellek kapcsolata

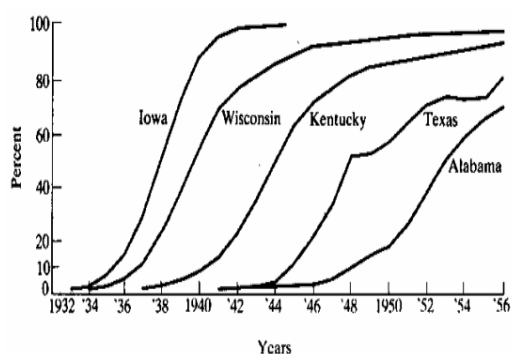
6. Technológiai innovációk diffúziója

Az eddig megismert mintegy féltucatnyi növekedési függvény alkalmazási területe⁷ a populációbiológiától, az orvostudományon, valamint a demográfián keresztül egészen a szociológiáig terjed. A logisztikus függvény monopol helyzete már a társadalomtudományi alkalmazásokban is megszűnt, hegemón pozícióját azonban továbbra is megtartotta. Mindez összefügg azzal, hogy ezen alkalmazások túlnyomó része hagyományosan a technológiai

⁷ Áttekintésünkben a fizikát és a mérnöktudományokat teljes egészében figyelmen kívül hagyjuk, hiszen ezeknek a tudományoknak általában is szinte anyanyelve a matematika. Ezen belül pedig a fenti differenciálegyenletekre támaszkodó matematikai modellek alkalmazása már nagyon régóta nem számít revelatív erejűnek. Ezen a ponton elég arra utalnunk, hogy (a 21) alatti Bertalanffy illetve (26) alatti Richards modellek az úgynevezett Bernoulli-féle differenciálegyenlet speciális esetének tekinthetők.

innovációk diffúziójára vonatkozik. Kuznetz, az 1971-ben közgazdasági Nobel-díjjal jutalmazott gazdaságtörténész már 1930-ban felismerte, hogy a technológiai változás S-görbét formázva halad előre, s ilyen típusú növekedési mintázatra utal a Rostow-féle szakaszelmélet is.

Az első valódi empirikus kutatások az agrárinnovációk terjedését elemezték. Úttörő jellegűnek tekinthető Ryan és Gross 1943-as kutatása a kukorica hibridek terjedéséről Iowa államban. Későbbi hatását tekintve azonban igazán korszakos jelentőségűnek Zvi Griliches egy 1957-ben hasonló témában írt műve bizonyult. A tanulmányából átvett és a 17. ábrán bemutatott szimmetrikus S-görbék azóta a logisztikus növekedés társadalomtudományi alkalmazásának szimbolikus ikonjaivá, maga az írás pedig állandó hivatkozási alappá vált. Figyelemre méltó, hogy idézettsége alapján a tanulmány napjainkban már harmadik reneszánszát éli. (18. ábra)



17. ábra

A hibrid kukorica termőterületének százalékos részaránya az USA különböző államaiban



18. ábra

Zvi Griliches tanulmányának idézettsége
Forrás: David, Paul, A. 2003.

Néhány évvel később Mansfield (1961) már tizenkét ipari technológiai eljárás esetében vizsgálta meg, hogy azok miként terjednek az érintett vállalatok körében. A diffúziót egyfajta vállalatok közötti mintakövetési folyamatnak tekintette, s egy sor kísérletezés után a logisztikus függvényről kötött ki, ahol magát az r paramétert imitációs rátaként interpretálta. Ezek a korai kutatások tehát az innovációk diffúziója terén mind valamiféle S-görbét detektáltak, s azt szinte automatikusan a logisztikus függvényel azonosították.

Mivel a korai kutatások közös előfeltevése volt, hogy az innovációk diffúziója nem csak kívánatos, hanem lehetőség szerint minél gyorsabbnak is kell lennie, az S-görbe

felbukkanása némi meditációra adott okot. Egy ilyen görbe jelenléte ugyanis éppen a diffúzió terjedésének viszonylagos lassúságát illusztrálja. Azt a váratlan fejleményt, hogy a dolgok néha meglepően hosszú ideig tarthatnak, s hogy egy új technológiát megjelenésekor még azok között is meglepően kevesen fogadnak el, akiknek egyébként nyilvánvaló hasznuk származik belőle. Szembesülve ezzel a problémával, Rogers (1962) feltételezte, hogy mint minden(?) emberi tulajdonság, úgy az emberek „innovációra való hajlandósága” is – már, ha van egyáltalán ilyen(!), tenném gyorsan hozzá - az emberi populációkban normális eloszlást követ. Erre alapozta híres és a hazai irodalomban egy kicsit túlértékelt kategorizálását a 2,5 százaléknyi újtóról, a 13,5 százaléknnyira taksált korai adoptálókról, az egyaránt 34-34%-os csoportot alkotó korai illetve kései többségről, valamint a 16 százaléknnyi lemaradóról.

Úgy vélem, ma már több szempontból is erős fenntartással kell fogadnunk elméletének ezt a részét. Nyilvánvaló ugyanis, hogy koncepciója nem empirikus, hanem apriori jellegű. Először is az egyes kategóriákra adott fenti százalékok úgy álltak elő, hogy a standard normális eloszlás egyszeres illetve kétszeres szórásnyi távolságát tekintette a kategóriákat elválasztó küszöbnek. Ugyan milyen alapon? Ráadásul egyáltalán nem biztos, hogy az emberi populációban valamilyen szociológiailag releváns tulajdonság tényleg normális eloszlást követ. Elég, ha ez ügyben az úgynevezett skálamentes hálózatokra, és az azokat jellemző hatványfüggvény eloszlásra utalunk.

Rogers feltételezte továbbá, hogy az egyes adoptációs kategóriákba tartozó emberek társadalmi jellemzőik szerint is elkülöníthetők. A marketinggel foglalkozók szerint azonban semmi sem bizonyítja olyan általános személyes jegyek meglétét, amelyeket az innovációra való hajlandósággal azonosíthatnánk. Sokan lehetnek újtók az egyik, és lemaradók egy másik termék esetében. Legfeljebb utólag, egy konkrét diffúzió lezárultakor lehetne felállítani valamiféle tipológiát. Ez persze erősen csökkenti a modell prediktív erejét és az empirikus piackutatásban való alkalmazhatóságát. Rogers tipológiája mindenesetre egyféle magyarázatot ad az S-görbék felbukkanására. Nála ugyanis valamilyen S-görbe megjelenése abból fakad, hogy a populációnak az innovációra való hajlandóság szerint elkülöníthető kategóriái különböző időpontokban adoptálják az új technológiát. Ha Rogersnek ezt a magyarázatát fenntartással fogadjuk, akkor továbbra is nyitott marad a kérdés, hogy *miért éppen S-görbe?* S ha netán tényleg az, akkor pontosan *milyen* is?

6.1 A diffúzió, mint információterjedési folyamat

A probléma tehát a következő. Ha egy új technológia adoptálása, más régebbi technológiák alkalmazásához viszonyítva nyilvánvaló relatív előnyökkel jár, mondjuk bizonyos vállalatok számára, akkor ezen a körön belül egyes vállalatok miért alkalmazzák jóval lassabban ezt a technológiát, mint mások?

Tán, mert nem tudnak róla! Világos, hogy az információ hiánya már önmagában is magyarázhatja az adoptálás elmaradását, ennyiben tehát ez a legegyszerűbb válasz a kérdésre. Ennél azonban egy lépéssel tovább mennénk. Feltesszük, hogy a potenciális felhasználók mindegyike azonnal adoptálja az új technológiát, amint hall felőle. A technológia diffúzió kérdését ettől a pillanattól kezdve információterjedési problémává alakítottuk át. Következésképpen most már csak az információterjedés mikéntjét vagy mikéntjeit kellene megértenünk.

Induljunk ki ennek érdekében egy tetszőleges K létszámú populációból. Egy a populációban megjelenő és várhatóan elterjedő innováció számára ekkor nyilván K jelenti az összes lehetséges potenciális felhasználó számát, azaz tulajdonképpen a mindenkori felhasználók $N(t)$ számának a saturációs szintjét.

6.11 Tömegkommunikációs információterjedés

Tegyük fel, hogy az információ ezúttal egy központi forrásból terjed, és hogy egy időegység alatt a teljes szóba jöhető populáció α százalékát éri el. Világos, hogy ha $\alpha = 1$, akkor az információáramlás, s feltevésünk értelmében a diffúzió is azonnali lesz. Ha $\alpha < 1$ akkor az információ fokozatosan terjed, s egységnyi idő alatt $\alpha(K - N)$, míg Δt idő alatt $\Delta N = \alpha(K - N)\Delta t$ újabb emberhez juthat el. Ennyivel nőhet tehát az adoptálók száma. Innen a felhasználók számának időegységre eső megváltozására $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \alpha(K - N)$, majd $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenettel a felhasználók számának pillanatnyi megváltozására az

$$\dot{N} = \frac{dN}{dt} = \alpha(K - N) \quad (31)$$

differenciálegyenlet adódik, ami formailag tökéletesen megegyezik a (21) formulában megismert Mitscherlich-féle modellel. Azt kaptuk tehát, hogy ha az új technológiára vonatkozó információ egyetlen központból terjed, akkor e technológia diffúzióját a Mitscherlich modell írja le.

Úgy véljük, hogy ez a típusú modell többé-kevésbé valószerű leírása lehet annak, hogy az emberek miként szerezhetnek tudomást egy új margarin, egy új rágógumi, vagy mondjuk

egy új fejfájás csillapító tablettá megjelenéséről. De a modell talán a világpolitikai eseményekkel kapcsolatos információk terjedésének is egy lehetséges megközelítést nyújthatja. Ezen a módon azonban valószínűleg inkább az innováció létezésére vonatkozó információ, mint maga az innováció terjedhet. Ráadásul az ilyen típusú információterjedésre alapozott diffúzió nyilvánvalóan nem S-görbét állít elő (lásd megint a 16. ábrát), márpedig empirikus vizsgálatok sokasága mutatta ki az S-görbék jelenlétét a diffúziós folyamatokban. Itt ezért még nem állhatunk meg, az információterjedésnek más útjait is fel kell tárunk.

6.12. Személyközi kommunikációs információs folyamat

A diffúzió jellege szempontjából már Rogers is megkülönböztette a technológia hardver, illetve szoftver részét. Az új technológiát megtestesítő hardver *létezésére* vonatkozó információ valószínűleg jelentős részben tényleg úgy terjed, ahogy azt a (30) formula írta le. A technológia tényleges *alkalmazásához* szükséges információval azonban más a helyzet. Ennek jelentős része csak a használat során megszerezhető tudás, ami a legritkábban terjed műszaki leírások, vagy felhasználói kézikönyvek segítségével. „Minél bonyolultabb a gép és a technológia, minél nagyobb a technológia tudományos háttere és megalapozottsága, annál több a személyes, a szokásszerű és az intuitív, tehát az írásban, utasításban nem rögzített elem is a munkafolyamatokban.” A gépek mellett hosszabb ideje dolgozó „munkás egész sor le nem írt trükköt, eljárást ismer, amelyek nélkül a gép biztonságos és gazdaságos működtetése lehetetlen. Ezeket a trükköket és eljárásokat a munkások szóban adják át egymásnak, vagy ellesik őket egymástól.”(Kemény István 1990)

Hasonlóképpen az innovációra vonatkozó tudás is sokszor csak az aktuális felhasználók és a potenciális felhasználók közti személyes érintkezés, és közvetlen kommunikáció során terjedhet. A potenciális felhasználók számára tehát az információ legfőbb forrása ebben az esetben nem valamiféle központ, hanem a már megfelelő tapasztalatot felhalmozott korábbi felhasználó. James Coleman és társai, akik az antibiotikumok terjedési folyamatait vizsgálva szintén S-görbére bukkantak, úgy találták például, hogy a kereskedők és hirdetések hatása igencsak korlátozott az ismerős orvosok személyes tapasztalatához képest.

Az innováció adoptálásával kapcsolatos döntés során ugyanis nem egyszerűen az információ a fontos, hanem az információ releváns jellege. Ez pedig a forrás hitelességének kérdését veti fel. A legtöbb egyén ezért az innovációt már alkalmazók személyes tapasztalatai alapján alakítja ki az innovációval kapcsolatos attitűdjét, s hozza meg a maga döntéseit.

A fentiek alapján állítható, hogy a diffúzióban annak társadalmi természete a meghatározó. Az S-görbének megfelelő lassú indulás azzal függhet össze, hogy egy innováció kezdetben ellentmondhat bizonyos bevett gyakorlatnak, szokásnak, társadalmi normáknak. A korai alkalmazók ezért akár deviánsnak is minősülhetnek. Az attitűdök megváltoztatásában illetve újak kialakításában azonban a személyközi kommunikáció jóval hatékonyabb, mint az egyetlen központból kiinduló információáramlás.

Világos, hogy ennek a személyről személyre terjedő úgynevezett élősavas diffúzióknak más lesz a dinamikája, mint az egyetlen központból terjedőnek. Legyen most β annak valószínűsége, hogy *egy* kurrens felhasználó kapcsolatban lép *egy* potenciális felhasználóval. N kurrens felhasználót feltételezve, annak valószínűsége, hogy ezek *valamelyike* kapcsolatba kerül *egy* potenciális felhasználóval βN lesz, míg annak valószínűsége, hogy az N kurrens felhasználó *valamelyike* kapcsolatba kerül a $(K - N)$ potenciális felhasználó *valamelyikével* $\beta N(K - N)$. Ennek következtében Δt idő alatt $\Delta N = \beta N(K - N)\Delta t$ új felhasználóhoz juthat el az információ, ahonnan $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \beta N(K - N)$, amiből $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenet esetén

$$\dot{N} = \frac{dN}{dt} = \beta N(K - N).$$

Innen K -t kiemelve

$$\dot{N} = \beta KN \left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

majd $r = \beta K$ jelöléssel a jól ismert

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (32)$$

logisztikus modellhez jutunk.

A személyközi kommunikáció révén rábukkantunk tehát a diffúzió olyan mechanizmusára, amely nem egyszerűen valamilyen S-görbét, hanem magát a logisztikus függvényt állítja elő. Az alkalmazott egyszerűsítő feltevések miatt ez persze még korántsem lehet e téren az utolsó szó, a pillanat mégis alkalmas arra, hogy ezen a ponton néhány konkrét diffúziós vizsgálatot is alaposabban szemügyre vehessünk.

6. 121. Mobil telekommunikációs szolgáltatások diffúziója

Kézenfekvő, hogy figyelmünket érdemes a munka-, és hétköznapjainkat, magán-, és közsféránkat egyaránt átalakító információs technológiák diffúziójára irányítanunk. A legérdekesebb természetesen az Internet diffúziójának elemzése lenne, erre azonban az eszköz multifunkcionális, sokarcú jellege, tehát tulajdonképpen éppen kiemelkedő fontossága miatt pillanatnyilag nem érzem felkészültnek magam.

Jobban körülhatárolható, s ennyiben egyszerűbb feladatnak tűnik a mobil szolgáltatások terjedésének elemzése. Ismert, hogy a mobil diffúzió terén az OECD országok nagy részében olyan S-görbét találunk, amely egy lassú, és viszonylag hosszú bevezető szakasz után 1997 körül gyors növekedési, majd 2002 táján máris saturációs szakaszába lépett. Ezzel együtt az éllovas és a lemaradó országok között jelentős lehet az eltérés. A mobil telefonok elterjedtsége Luxemburg és Tajvan esetében 2001-ben már 96%-os, míg az USA illetve Kanada esetében csupán 44% illetve 32%-os volt.

E különbségekkel is számot vető modellt tesztelt Gruber és Verboven (2001) a mobil telekommunikációs szolgáltatások európai uniós diffúziójának elemzésére. Talán ez az első szisztematikus elemzés, amely annak okait is vizsgálja, hogy mitől állhattak elő ezek a különbségek az egyes országok között. Megjegyezzük, hogy a mobil szolgáltatások esetében, amelyek a vezeték helyett rádió transzmissziót használnak, a szűkös erőforrás a frekvencia maga. A nyolcvanas évek elején bevezetett 450MHz-es analóg technika lehetőségei e tekintetben különösen korlátozottak voltak. A frekvencia alacsony hatásfokú kihasználtsága miatt, egy adott földrajzi körzetben egyszerre csak kevesen beszélhettek. A nyolcvanas évek második felében alkalmazott 900MHz-en működő második generációs analóg technológia jobban ki tudta használni a rendelkezésre álló frekvenciát. A magasabb frekvencia ugyan több bázis állomást igényelt, ugyanakkor a terület sűrűbb lefedettsége a frekvencia jobb kihasználását eredményezte. Az áttörést azonban a háromszor-négyszer annyi felhasználót kiszolgáló képes digitális technológia megjelenése jelentette, amelynek első generációja szintén 900MHz-en jelent meg. Ez biztosította a kellő számú potenciális fogyasztó elérését, s ezzel a mobilszolgáltatások piacának tulajdonképpeni kialakulását. A legszélesebb körben használatos első generációs digitális rendszernek az európai szabványként működő Global System for Mobiles (GSM 900) bizonyult, amelyet nem sokkal később az 1800MHz-en működő második generációs digitális rendszerek követték.

A technológiai váltással párhuzamosan nagyon jelentős volt a diffúzió közegét közvetlenül befolyásoló állami szabályozási aktivitás. A technológiai szabványok kialakítása, az engedélyek kiadásának időzítése, illetve a kiadott engedélyek száma itt mind fontos szerepet játszott. Az analóg technológia korszakában a vizsgált országok egymástól

nagyon eltérő szabályozási politikát követtek. A legtöbb ország, például Franciaország, az Egyesült Királyság és Svédország a frekvencia szűkösségére hivatkozva ekkor még csak egyetlen, tehát monopóliumot eredményező engedélyt adott ki. A kereslet növekedése fokozatos nyomást jelentett további engedélyek kiadására. Néhány ország a 900MHz-es analóg technológia bevezetését tekintete ilyen alkalomnak. A legtöbb esetben azonban a korábbi 450MHz-es szolgáltatók kaptak további engedélyt. Az Európai Unió 1996-os direktívájában azonban már azt javasolta, hogy a GSM 900 digitális technológia esetében legalább két, az 1800MHz-es technológia esetében pedig legalább egy újabb működési engedélyt adjanak ki. Az egyes országok között azonban még ekkor is eltérések lehettek a működési engedélyek időzítésében.

A mobilszolgáltatások elterjedését tehát, a technológia első bevezetését követő további újítások, valamint állami szabályozási akciók egyaránt befolyásolták. Figyelemre méltó, hogy az egyszerű

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{-rt-b}} \quad (33)$$

alakú háromparaméteres logisztikus modellel milyen könnyű tesztelnünk a fenti tényezőknek, - jelesül az analóg/digitális technológiai váltásnak, illetve a sugárzási engedélyek kiadási időpontjának, s ezzel a piaci verseny kialakulásának - a diffúzió sebességére gyakorolt hatását.

Mindehhez persze megfelelően specifikálnunk kell a (33) formulában szereplő paramétereket. A K saturációs szintről egész egyszerűen feltesszük, hogy az adott ország teljes népességének valamilyen fix százaléka. A képletben szereplő b helyzetparaméterről pedig tudjuk, hogy csupán a függvény helyzetét befolyásolja, alakjának megváltoztatása nélkül. Elég kézenfekvő ezért, hogy ezt használjuk a szintén konkrét időpontokhoz köthető technológiaváltás hatásának felmérésére. Ehhez azt kell feltennünk, hogy

$$b = b^F + b^D DIG, \quad (34)$$

alakú, ahol DIG egy nulla vagy egy értéket felvevő úgynevezett dummy változó, amelynek értéke 1, ha a vizsgált ország az adott időpontig már bevezette a digitális technológiát és 0 egyébként. A 34. formulában b^F egy fix időparaméter, amely a bázisul választott országhoz képest mutatkozó lemaradást (esetleg előnyt) méri.

Feltevésünk szerint a diffúzió sebességét az analóg/digitális technológiai váltás valamint a piaci verseny fokozatos kialakulása befolyásolta. A 33. formulában ezért a diffúzió sebességét mérő r paramétert négy további elemre bontjuk szét,

$$r = r^F + r^D DIG + r^{CA} CMPA + r^{CD} CMPD \quad (35)$$

ahol r^F az autonóm, ország-specifikus diffúziósebesség, DIG a 34-ből már ismert, míg $CMPA$ és $CMPD$ pedig két, – a verseny szerepét megragadó – új dummy változó. Ezek értéke akkor 1, ha az analóg és a digitális rendszerekben külön-külön legalább két szereplő létezik, egyébként meg nulla. Gruber és Verboven az 1984-1997 közötti időszakban, az Európai Unió minden egyes tagállama esetében illesztette ezt az

$$N_i(t) = \frac{K_{it}}{1 + e^{-\left(r_i^F + r^D DIG_{it} + r^{CA} CMPA_{it} + r^{CD} CMPD_{it}\right)t - \left(b_i^F + b^D DIG_{it}\right)}} \quad (36)$$

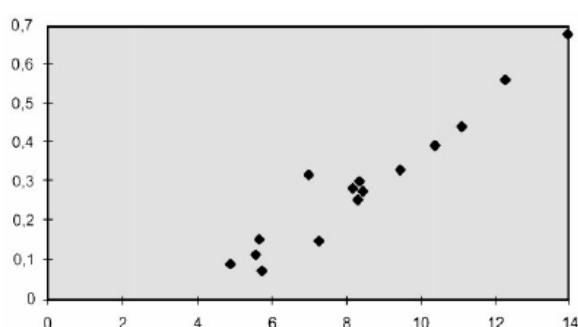
alakú modellt, ahol i most az egyes országokat, t pedig a vizsgált éveket jelöli.

Annak érdekében, hogy a vizsgálat eredményeiről egyszerű, de mégis átfogó képünk legyen, a továbbiakban az országonként meghatározott paraméterek átlagát közöljük. Így a saturációs szintre 60% adódott, ami azt jelenti, hogy a jelenlegi adatok szerint a diffúzió a lakosság csaknem kétharmadánál fog stabilizálódni. A technológiaváltás és az állami szabályozás hatásától megtisztított, s ennyiben autonóm diffúziósebességét mérő paraméterre Gruberék $r^F = 0,295$ értéket kaptak, ami az inflexiós pontban jelentős, évi mintegy 15%-os növekedésnek felel meg.

A DIG_{it} változó együtthatója az analógról a digitális technológiára való áttérésnek a diffúzió felgyorsításában játszott szerepét méri. A kapott $r^D = 0,130$ érték, bár a fele sincs az autonóm diffúzió sebességének, még mindig igen jelentősnek mondható. Felmerült annak lehetősége is, hogy ez a technológiaváltás a diffúzióban talán nem csak sima sebességváltozást, hanem ugrásszerű gyorsulást eredményezett. Az eredmények azonban egy ilyen hirtelen ugrás létét nem erősítették meg.

A fentieknél sokkal kisebb a hatása a második szolgáltató belépésével megkezdődő versenynek. A verseny hatását megragadó változók együtthatóira kapott $r^{CA} = 0,023$, és $r^{CD} = 0,014$ értékek több mint egy nagyságrenddel kisebbek a korábban bemutatott $r^F = 0,295$ paraméternél. Ez az eredmény egyébként összhangban van Parker és Römer (1997) kutatási eredményével, akik úgy találták, hogy a kialakult duopóliumoknak az USA esetében is csak kis hatásuk volt a diffúzió sebességére.

Emlékszünk még arra, hogy a 34. formulában a b_i^F paraméter a bázisul választott országhoz képest mutatkozó időbeli lemaradást (esetleg előnyt), míg 35-ben r_i^F az autonóm, ország-specifikus diffúziósebességet mérte. Érdekes kérdés lehet, hogy a későn induló országok esetében vajon megfigyelhető-e valamiféle felzárkózás, más szóval létezik-e valamiféle kapcsolat az r_i^F illetve a b_i^F paraméterek országonként becsült értékei között. Az r_i^F sebességhatást a b_i^F timing paraméter függvényében ábrázolva (18. ábra), erős pozitív lineáris korrelációt figyelhetünk meg, ami arra utal, hogy minél később adoptált egy ország annál nagyobb diffúziósebességre volt képes.



19. ábra

Diffúziós sebesség a belépési időpont függvényében

Megfigyelhető tehát valamiféle utolérési, felzárkózási jelenség. Az okok sokfélék lehetnek. Az infrastrukturális beruházások, és a fogyasztói költségek csökkenése mellett szerepet játszhat egy nemzetközi léptékű tanulási folyamat, valamint egy az idő múlásával erősödő nemzetközi léptékű network hatás. Pontosan nem tudhatjuk. Az eredmény mindenesetre az, hogy egy bizonyos idő múltán – az adatokból erre az időpontra 2006. adódott – mindegyik ország az adoptálás ugyanazon szintjére ér el.

Az első siker után Gruber és Verboven tesztelték eredeti modelljüknek egy módosított

$$r_{it} = r_i^F + r^D DIG_{it} + r^{CA} CMPA_{it} + r^{CD} CMPD_{it} + rz_{it} \quad (37)$$

alakú, bővített változatát is. Itt a z_{it} változó az olyan keresleti változókat foglalja magába, mint a GDP, valamint a vezetékes telefonfővonalak száma. A GDP hatása bár természetesen pozitív volt, nem bizonyult szignifikánsnak. A telefonfővonalak számának változója pedig, szignifikáns negatív hatást mutatott, ami arra utal, hogy a diffúzió kezdeti szakaszában a fogyasztók úgy tekintettek a mobil telefonokra, mint a vezetékes hálózat helyettesítésre

A modell rugalmasságát jelzi, hogy a specifikáció megfelelő módosításával a Közép-, és Kelet-Európa tagjelölt országainak egészen sajátos körülményei között lezajlott mobiltelefon diffúzióra is alkalmazható. (Gruber 2001) Ehhez figyelembe kell venni azt a nyilvánvaló tény, hogy ebben a régióban a mobiltelefonok elterjedése egybeesett a piacgazdaság kiépülésével. Másfelől közismert, hogy a telekommunikációs szektor a szocializmus évtizedeiben nem minősült „termelőnek” így erősen díszpreferált volt. Ebben a szektorban voltak talán a legintenzívebbek a hiánymutatók. A vezetékes hálózat teljes kiépítése évtizedes lemaradás ledolgozását jelentette és komoly erőfeszítéssel járó beruházásokat igényelt. A mobiltelefon szolgáltatások fejlesztése ebben a helyzetben egy lehetséges alternatív megoldásnak tűnhetett.

A szolgáltatás itt is az analóg technológia alkalmazásával indult. Mégpedig többnyire olyan monopóliummal, amelyet az évtizedek óta versenytárs nélküli vezetékes szolgáltató óriás szerzett meg. A magas árak ekkor még csak nagyon lassú diffúziót engedtek meg, igaz az EU országokkal ellentétben itt már ugyanazt a szabványt vezették be, ezért eleve nagyobb piac alakulhatott ki. A GSM rendszerek bevezetése szinte mindenütt duopólium kialakulásához vezetett. Az országok közti eltérés itt csak abban nyilvánult meg, hogy a duopóliumhoz vezető engedélyeket egy időben, vagy időben eltolva adták ki. Magyarországon például a szolgáltatók 1994-ben alig egy hónapos eltéréssel indultak, míg Litvániában az 1995-ös első engedélyt csak 1997-ben követte a második. Arra számíthatnánk, hogy a szimultán bevezetés arányosabb piaci eloszlást eredményez. Ez azonban nem feltétlenül alakult így. Az új rendszer bevezetésének egy másik ország-specifikus sajátosságát jelentette, hogy az új szolgáltatók között vajon ott volt-e a régi vezetékes monopol szolgáltató, vagy sem.

A modellparaméterek specifikációja tekintettel kell legyen a fenti sajátosságokra. Gruber ezért egy olyan modellt alkalmazott, amelyben a 34. formulát változatlanul hagyva, a 35. egyenlet helyett az

$$r_{it} = r_i^F + r^D DIG_{it} + rz_{it} \quad (38)$$

formulát alkalmazta. Újdonságot a z_{it} vektor jelent, amely néhány a diffúziót feltehetően befolyásoló keresleti-, illetve készletváltozót foglal magába. A figyelembe vett változók az egy főre jutó bruttó hazai termék; az egy főre jutó vezetékes telefon fővonalak száma; a várakozási lista hosszát mérő változó; az adott ország urbanizációs szintje; az engedélyek szimultán, vagy egymást követő kiadását magragadó dummy változó; a piacgazdaság

kiépülésének foka; valamint a szolgáltatást nyújtó cégek száma voltak. Megjegyezzük, hogy Gruber a fenti specifikációval a Gompertz függvény illesztését is kipróbálta.

Az eredményekből a legszembeszökőbb, hogy a saturációs szintre mindössze 17% adódott, ami sokkal alacsonyabb, mint a 15-ök esetében kapott 60%. A legfontosabb regionális sajátosság azonban mégiscsak az, hogy az Európai Unió régebbi tagjaitól eltérően ezekben az országokban a digitális technológiára való áttérés hatása nem bizonyult szignifikánsnak. A piaci szereplők számának alakulása, illetve a sugárzási engedélyek együttes kiadása azonban jelentős pozitív hatást fejtettek ki. Egyáltalán nem meglepő, hogy a vezetékes telefonfővonalra való várakozás ideje pozitívan befolyásolta a diffúzió sebességét. Figyelemre méltó ugyanakkor, hogy az egy főre jutó vezetékes telefonfővonalak számának hatása is pozitív, ami arra utal, hogy a tizenötökkel ellentétben az induláskor itt még nem helyettesítésről, hanem inkább kiegészítésről beszélhetünk. A várakozásokkal ellentétben az adott ország urbanizációs szintje, és a piacgazdaság kiépülésének foka nem játszott a diffúzióban szignifikáns szerepet. Ezen országok körében is megfigyelhető, a később indulókra jellemző utolérési tendencia. A felzárkózás idejére 15 év adódott. Tekintettel arra, hogy a diffúziós folyamat itt 1990-ben kezdődött, a konvergencia évének adódott 2005-ös év nagyon közel van a tizenötökre kapott 2006-os évhez. A két ország csoport diffúziója tehát lassan összehangolódik.

A Gompertz-görbe illesztése általános tekintetben tekintve megerősítette a fenti eredményeket, az illeszkedés jóságát tekintve azonban elmaradt a logisztikus függvénytől.

6.13. Kevert modell

Úgy tűnik minden okunk meglehet az elégedettségre. A személyközi, élőlászavas kommunikációt feltételező diffúziós modellel elméletileg megalapoztuk a logisztikus függvény használatát. Az így elővezetett matematikai eszköz segítségével pedig, figyelemre méltóan kifinomult alkalmazásokra voltunk képesek.

Csakhogy mindennek van egy alapvető gyengesége. Mint egyetlen imitációs folyamat, úgy ez sem indulhat a nulláról! Az élőlászavas kommunikáció csak akkor indulhat be, ha már van kitől tanulni, már vannak felhasználók! Ők lehetnének talán a Rogers által emlegetett korai felhasználók, akiknek nyilvánvalóan nincs szükségük arra, hogy másoktól tanuljanak, vagy másoktól kapjanak kedvet a felhasználáshoz. Ez azt sugallja, hogy egy pontosabb modell különbséget kell, hogy tegyen legalább két ágens között.

A megoldás az lehet, hogy a korai felhasználókról feltételezzük, hogy fogékonyabbak a központi forrásból érkező információra, mint a követő felhasználók. Ez azt jelenthetné, hogy egy realistább modell kombinálná a kommunikáció kétféle típusát. Frank M. Bass a tartós fogyasztási cikkek diffúziójára vonatkozó úgynevezett fertőzési modelljében már 1969-ben javasolta a Rogers féle elképzelés ilyenén módosítását. Rogers kategóriáiból csak az újítókat őrizte meg, a többieket egyesítette az imitálók kategóriájában.

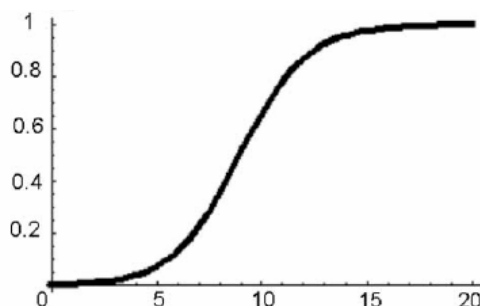
Az innovációt még nem alkalmazók tehát, két információforrással rendelkeznek. A központi forrásból érkező információ esetében az abszorpciós ráta független a felhasználók aktuális számától, míg az élöszavas információáramlás természetesen függ az aktuális felhasználók számától. E két információforrással rendelkező kevert modellben az aktuális felhasználók száma a Mitscherlich és a logisztikus függvényt kombináló

$$N(t) = \frac{K \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\sigma} t} \right)}{\left(1 + a e^{-\frac{\beta}{\sigma} t} \right)} \quad (40)$$

alakú függvény szerint alakul, ahol $\sigma = \frac{\alpha}{\alpha + r}$ a központi forrás relatív erejét mutatja. Ha $r = \beta K = 0$ akkor nincs élöszavas kommunikáció és $\sigma = 1$, ha $\alpha = 0$ akkor közös forrás nincs, és $\sigma = 0$. Ez utóbbi esetben $N(t) = 0$ marad minden t időpillanatra, hiszen nincs olyan közös forrás, amely létrehozná a korai felhasználókat. Ha a σ „kicsi”, akkor a logisztikus függvényhez nagyon hasonló görbét kapunk, bár az inflexiós pont a $\frac{K}{2}$ érték elérése előtt következik be. Ahogy a σ nő úgy csökken az inflexiós pont és válik a görbe növekvő mértékben aszimmetrikussá. A kezdeti gyorsuló szakasz lerövidül, miközben a saturációhoz vezető lassuló szakasz meghosszabbodik.

Jang, Show-Ling, és munkatársai (Jang, Show-Ling 2005) egy ilyen kevert modell tesztelésére tettek kísérletet a 29 OECD ország, valamint Tajvan esetében az 1980 és 2001 közötti időszakban. Úgy találták, hogy a vizsgált harminc országban a központi forrás hatása nem szignifikáns, így a diffúzió döntően személyközi kommunikációs hálózatokon keresztül zajlott. Kiderült az is, hogy az olyan társadalmi tényezők, mint a populáció sűrűség vagy az egy főre jutó GDP nem befolyásolják a diffúzió sebességét. Az összes ország átlagából adódó,

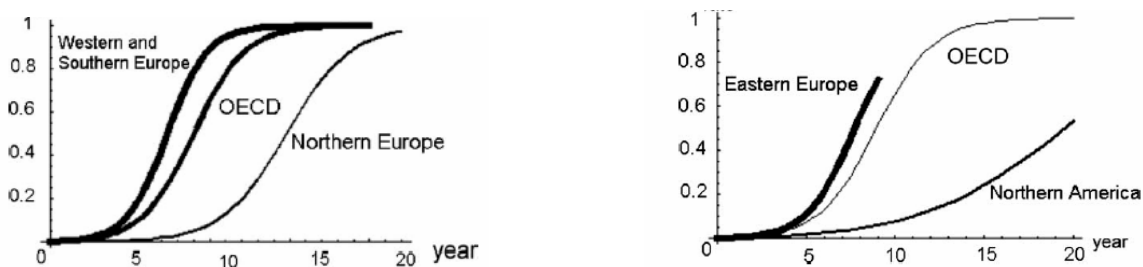
s mintegy húsz évet átfogó S-görbe azt mutatta, hogy az első öt év tekinthető a lassú növekedésű bevezető szakasznak, ezután kezdődött a take-off, és a folyamat a tizenötödik év táján kezdte megközelíteni a saturációs szintet (20. ábra)



20. ábra

Mobil diffúzió az OECD országokban és Tajvanon
Forrás: Jang, Show-Ling 2005

Ha külön-külön is megvizsgáljuk a kérdéses országokban a diffúzió alakulását, akkor három alapvető típust figyelhetünk meg (21. ábra).



21. ábra

Mobil diffúzió az egyes ország-csoportokban
Forrás: Jang, Show-Ling 2005

Teljes S-görbét mutatnak az észak-, nyugat valamint dél-európai országok, igaz a diffúzióban úttörő szerepet játszó észak-európai ország csoport esetében a diffúzió lényegesen lassúbb volt. A Kelet-Európai országok még a gyors növekedési szakaszban vannak, míg az Észak-Amerikai ország csoport kifejezetten alacsony penetrációt mutat.

A logisztikus modellt általában a diffúziós irodalomban, míg a fent bemutatott kevert modellt inkább a marketingben alkalmazzák. Persze a diffúzió sebességének korai kutatói – bár tényleg hatásos vizsgálatokat hagytak maguk után – nem egyszer talán túlságosan is ráerőltették a logisztikus modellt az adatokra. Általánosságban elmondható, hogy a bemutatott, alapvetően információterjedésre támaszkodó modellek valószínűleg jobban írják le a technológiáról szóló információnak, mint magának a technológiának, mint „mesterséges dolognak” a terjedését. Annyi azonban biztosan állítható, hogy időbe telik, amíg az új

technológiára vonatkozó információ eljut a potenciális felhasználókhoz, s hogy a tudás átvitelének különböző mechanizmusai befolyásolják a diffúzió időbeli alakulásának mintázatát.

Érdekes kérdés lehet annak vizsgálata, hogy mely tényezők határozzák meg az élőlészavas kommunikáció sebességét befolyásoló β paraméter értékét. Általánosságban olyasmint lehetne állítani, hogy a diffúzió nyilván gyorsabb, ha az új technológia egyszerű (ez felelne meg a Rogers-féle kompatibilitási elvárásnak), a populáció magas népsűrűségű és könnyen keveredő, a korai felhasználók nagy lelkesedéssel adják tovább az újítással kapcsolatok kedvező tapasztalataikat, amely nyilvánvalóan jobb, mint a régi, s az alkalmazására történő áttérés egyébként sem követel jelentős külön beruházást. Ezt a sokféle tényezőt a közgazdászok általában a várható profit, a tanulás és kockázat kategóriáiba sűrítik. A probléma ezekkel csak annyi, hogy az empirikus kutatások esetében nehezen mérhetők. Mi a továbbiakban csak egyetlen elemet, a populáció egyedei közti kapcsolatoknak a diffúziót befolyásoló hatását boncolgatjuk egy kicsit tovább.

6.14. A populáció jellege

A populáció egyedei közti kapcsolatoknak persze, csak az imitációs, azaz személyközi kommunikációs folyamatot feltételező modellek esetében van jelentősége. Eddig hallgatósan homogén, azaz olyan populációt feltételeztük, amelyben bármely egyed ugyanolyan eséllyel találkozhatott bármely másik egyeddel. Márpedig világos, hogy ez egyáltalán nincs így. Egy heterogén populáció esetében az egyének közti kommunikációs láncokban szakadások lehetnek, amelyek az információ terjedését is megakadályozhatják. Ráadásul heterogén populáció esetén még élesebben vetődik föl a hitelesség, vagyis a meggyőzés kérdése. Egy ilyen populáció esetében a diffúziót nyilvánvalóan erősen befolyásolhatja, hogy kik a különlegesen befolyásos egyedek, és miként találkoznak másokkal. E network struktúra feltárása azonban messze meghaladja e tanulmány kereteit. Pillanatnyilag sokkal egyszerűbb módon kísérreljük meg e populációs hatást megragadni.

Tegyük fel, hogy a teljes populáción belül két K_1 illetve K_2 létszámú alpopulációnk van. Ha ezek nincsenek semmilyen interakcióban egymással, akkor az innováció kurrens alkalmazóinak teljes létszáma két személyközi kommunikációs információterjedési folyamat összegeként áll elő, tehát

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

amelynek időegységre eső megváltozására a

$$\Delta N(t) = [\beta_1 N_1 (K_1 - N_1) + \beta_2 N_2 (K_2 - N_2)] \Delta t$$

egyenletből az

$$\dot{N} = [\beta_1 N_1 (K_1 - N_1) + \beta_2 N_2 (K_2 - N_2)] \quad (41)$$

adódik. Ezt a formulát relatíve könnyű kiterjeszteni arra az esetre is, amikor van interakció a két populáció között. Tegyük fel, hogy az első populáció felhasználói η_{12} valószínűséggel találkoznak a második populáció potenciális felhasználóival, és η_{21} a valószínűsége a fordított találkozásnak. Ekkor a

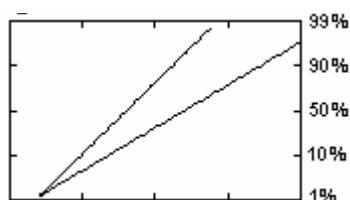
$$\Delta N(t) = [(\beta_1 N_1 + \eta_{12} N_2)(K_1 - N_1) + \beta_2 N_2 + \eta_{21} N_1 (K_2 - N_2)] \Delta t$$

egyenletből az

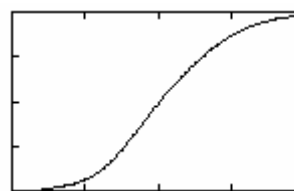
$$\dot{N} = [(\beta_1 N_1 + \eta_{12} N_2)(K_1 - N_1) + \beta_2 N_2 + \eta_{21} N_1 (K_2 - N_2)] \quad (42)$$

modell adódik.

Ebben a modellben igazán érdekes helyzet akkor áll elő, ha feltesszük, hogy az egyik alpopuláció korábban és gyorsabban adoptál, mint a másik, mert ekkor ez az alpopuláció az élősavas kommunikációt elkezdő második populáció számára mintegy információforrásként funkcionál. A diffúzió emiatt két olyan logisztikus növekedés eredője lesz, amelyek egyszerre indulnak, de amelyek közül az egyiknek a diffúziós ideje rövidebb, mint a másiké, gyorsabban éri el a saturációs szintjét (22. ábra). Az aggregált diffúziós görbe, egy többékevésbé gyors felfutással és hosszú telítődési szakasszal rendelkező *aszimmetrikus* S-görbe lesz (23. ábra).



22. ábra
Két egyszerre induló logisztikus növekedés
(Fisher-Pry transzformáció)



23. ábra
A 22. ábra két egyszerre induló logisztikus
növekedésének eredője

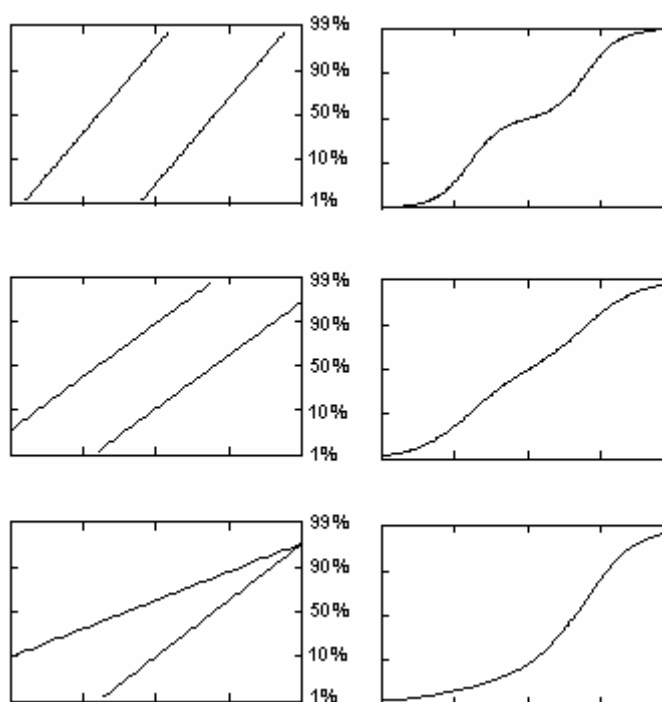
7. A növekedés határai?

7.1. Bi-logisztikus növekedés

Miközben a fentiekben a heterogén populációval kapcsolatos kérdéseket próbáltuk meg elrendezni, a kapott 22-23. ábrákkal váratlanul a logisztikus növekedés meglehetősen újszerű, s lehetőségeinket messze kitágító alkalmazására bukkantunk. Számos példa ismert ugyanis olyan pulzáló folyamatra (Meyer 1994.), amikor egy növekedési folyamat bázisán egy újabb kezdődik. Mindközül a legegyszerűbb talán a 22-23. ábrákhoz hasonló, úgynevezett bi-logisztikus növekedés, amely általánosságban két tetszőleges logisztikus leképezés összegzéseként képzelhető el.

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{-\frac{\ln 81}{\Delta_1}(t-t_{m_1})}} + \frac{K}{1 + e^{-\frac{\ln 81}{\Delta_2}(t-t_{m_2})}} \quad (43)$$

Aszerint, hogy a formulában szereplő Δ_1 , illetve Δ_2 növekedési időtartamok mennyire fedik át egymást, illetve, hogy a diffúziós sebességek miként viszonyulnak egymáshoz, a fenti bi-logisztikus függvény segítségével nagyon változatos formájú növekedési folyamatokat állíthatunk elő. Kiegészítendő a 22-23. ábrákon már látottakat, a 24. ábrán bemutatunk három további alaptípust. A 24. ábra baloldalán rendre a kérdéses növekedés Fisher-Pry transzformációval ábrázolt két részfolyamata, míg a jobboldalán a megfelelő aggregált függvény található.

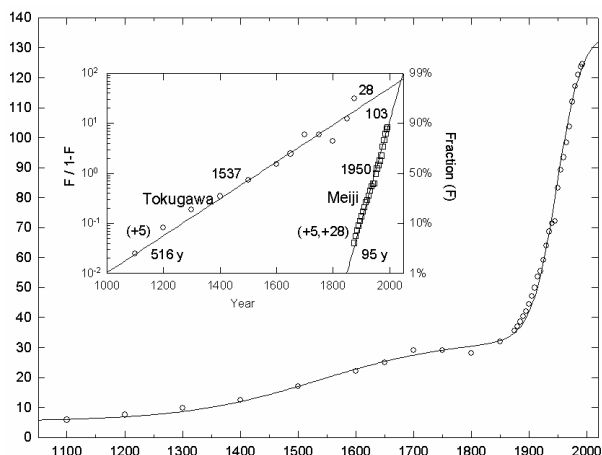


24. ábra

Variációk a bi-logisztikus növekedésre

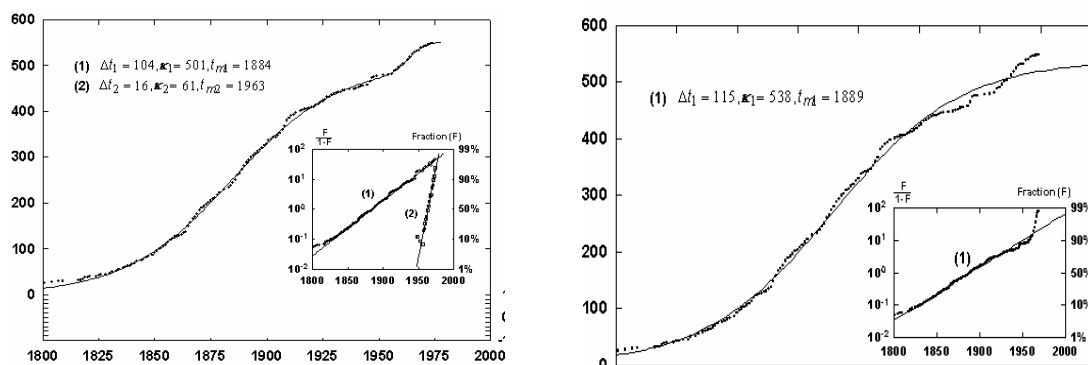
Az itt ábrázolt utolsó típus mintegy megfordítása annak, amit a 22-23. ábrákon láthattunk. Itt is két egymást átfedő, s eltérő sebességű logisztikus növekedéssel van dolgunk, csak hogy ezúttal nem a kezdőpontok, hanem a végpontok esnek egybe. Rendkívül eltérő területekről, hozhatunk példákat ilyen típusú folyamatokra.

Japán népességének alakulását például az elmúlt évezredben egy a Tokugawák korszakához köthető csaknem nyolcszáz éves, valamint egy az 1868-os meiji-forradalomtól elinduló logisztikus növekedés formálta. Az egyiknek 1537-ben a másiknak 1950-ben volt az inflexiós pontja és láthatóan körülbelül egyszerre fogják elérni a saturációs szintjüket (25 ábra)



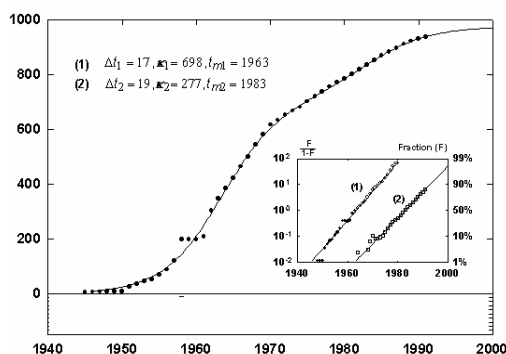
25. ábra
Japán népessége az 1100-1992 közti időszakban
Forrás: Marchetti, Perrin, Ausubel 1996.

Ugyanebben a típusba látszik tartozni az egyetemek számának alakulása az Egyesült Államokban. Mindez megerősíteni látszik azt, amit a felsőoktatási rendszer ötvenes évek végén, hatvanas évek elején bekövetkezett átalakításáról, és egy új egyetemalapítási hullám beindulásáról eddig is tudni véltünk. Az összehasonlítás kedvéért közöljük a sima logisztikus illesztés eredményét is. (26. ábra)



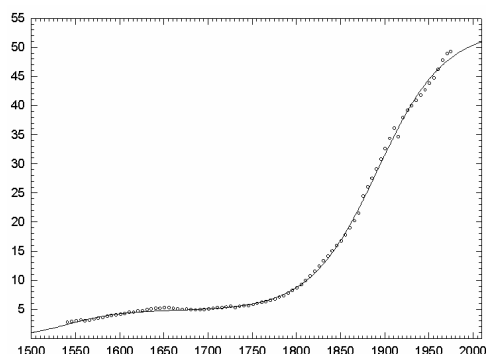
26. ábra
Egyetemek kumulatív száma az USA-ban bi-logisztikus illetve logisztikus illesztés
Forrás: Perrin, 1994.

Érdekes, s a fentiekől kissé eltérő bi-logisztikus növekedést mutat az Egyesült Államok nukleáris kísérleteinek alakulása (27. ábra). Az újdonság itt az, hogy a két folyamat kis késleltetéssel ugyan, de egymást jelentősen átfedve és lényegében azonos sebességgel haladt előre.

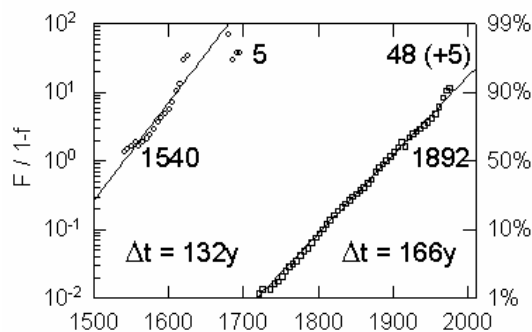


27. ábra
 Nukleáris kísérletek száma az Egyesült Államokban
 Forrás: Perrin, 1994.

Az eddigieknél is szokatlanabb, talán kétszer is nekifutó, s ezért aztán furcsán kígyózó S-görbét követ a 28. ábrán Anglia népességének alakulása.



28. ábra
 Anglia népessége 1541- 1975, Forrás: Perrin, 1994



29. ábra
 Anglia népessége 1541- 1975 (Fisher-Pry)

A jelenségre a 29. ábrán nyerhetünk magyarázatot, amelyből világosan kiderül, hogy két egymásra épülő, azonos sebességű, de ezúttal egymást követő, egymást át nem fedő logisztikus folyamattal van dolgunk.

7.2. Változó határok

A világ végső soron mégiscsak egyszerű? A fentiek során világossá vált, hogy kettő vagy akár több logisztikus függvény segítségével igazán bonyolult növekedési mintázatokat is ki tudunk keverni. A bi-logisztikus növekedés fogalmának bevezetésével nyilvánvalóan sikerült átlépnünk azt a korlátot, amit a logisztikus függvény alkalmazásában a grafikon szimmetrikus jellege jelentett. Közben azonban akaratlanul sikerült átléptünk egy másik korlátot is. Ismert, hogy a K saturációs szint a logisztikus függvény formulájában fix paraméterként szerepel. Ez

azt jelenti, hogy ez a felső korlát már a növekedés elindulásakor, a kezdet-kezdetén eleve adott, ami a növekedési folyamatnak egyfajta fátum jelleget kölcsönzött. A bi-logisztikus növekedés bevezetésével kiderült, hogy ez nem kell, hogy így legyen. Egy adott logisztikus növekedésnek persze továbbra is rögzített maradt a felső határa, a körülmények megváltozása azonban lehetővé teszi új, más logisztikus folyamatok, ezzel új határok megjelenését, s a régiéket átlépését.

A fix határok problémáját azonban nem csak újabbak megjelenésével haladhatjuk meg. Elképzelhető, hogy valamilyen meghatározott szabály szerint maga a saturációs szint is növekszik. A dolog hogyanja tulajdonképpen már ismert. Elegendő átvennünk a Gompertz-modell 11-12. formulái esetében követett eljárást. Emlékszünk, a Gompertz-modellt akkoriban tulajdonképpen kétváltozós differenciálegyenlettel határoztuk meg. Az első, $\dot{N} = rN$ alakú egyenlet formálisan még megegyezett az exponenciális növekedés modelljével. Csakhogy a Gompertz-modell esetében az r nem konstans paraméter volt, hanem egy exponenciálisan lecsengő második állapotváltozó, amelyre egy újabb, $\dot{r} = -Dr$ alakú állapotegyenlet volt érvényes.

Hasonlóan lehet megalkotni egy nyitott végű logisztikus jellegű növekedés modelljét. Induljunk ki a logisztikus leképezés megszokott

$$\dot{N} = N \left(1 - \frac{N}{K} \right), \quad (44)$$

alakú formulájából. Mivel a K saturációs szint ezúttal már nem fix paraméter, hanem szintén állapotváltozó, erre egy újabb állapotegyenletet kell találnunk. A többféle lehetséges megoldás közül kettőt mutatunk be. Perrin S. Meyer és Jesse H. Ausubel (1999.) a saturációs szintre is egy

$$\dot{K} = \alpha_K K \left(1 - \frac{K}{K_K} \right) \quad (45)$$

alakú logisztikus, ezzel szemben Thornley John H. M. és James France (2005) egy

$$\dot{K} = -D(K - N) \quad (46)$$

alakú exponenciálisan lecsengő növekedést javasoltak.

8. Egyéb elméletek

Eddigi elméleti megfontolásaink során feltételeztük, hogy a diffúziót valamiféle információterjedési folyamat vezérli. Ez tulajdonképpen nem is kétséges, de fontos különbséget tenni aközött, hogy hallottunk valamiről vagy, hogy aszerint is cselekszünk, amit hallottunk. Megérteni valamit vagy meggyőzve lenni valamiről nagyon eltérő állapotok lehetnek. Minél komolyabban vesszük ezeket a kérdéseket, annál messzebb kerülünk a szokásos fertőzési folyamatoktól. Mindez persze nem feltétlenül jelenti azt, hogy a logisztikus függvényt is fel kellene adnunk. Bár az élősavas információáramlás és a diffúzió során tapasztalható S-görbék kapcsolata beépült a szakmai köztudata, magától értetődően sok más modell, amelynek semmi köze az információáramláshoz is eredményezhet S-görbét. Az alábbiakban két lehetséges változatot mutatunk be.

8.1. Egyéni döntések

A fertőzési modellek, annak érdekében, hogy a diffúziót információterjedési folyamatként kezelhessék, elvonatkoztatnak az individuális szinttől, az egyének eltérő céljaitól, képességeitől és cselekvésétől. Nem feledkezhetünk meg azonban arról, hogy megbetegedni általában nem valamiféle tudatos döntés eredményeként szoktunk. Ezzel szemben egy innováció alkalmazása végső soron mindig az individuumok, a populáció egyedeinek szintjén meghozott adoptálási döntés eredménye.

Ha a diffúziós folyamatot egyéni döntésekre szeretnénk visszavezetni, akkor a legegyszerűbb azt feltételeznünk, hogy az egyedek különböznek egymástól egy olyan y jellegzetességben, amely egyébként mindegyiküknél befolyásolja az adoptációs döntést. Granovetter (1978) nyomán feltételezhetjük, hogy döntésük attól függ vajon ez a kérdéses jellemző meghalad-e vagy sem, egy bizonyos y^* küszöbértéket⁸. Az világos, hogy bármilyen makro-dinamikának az egyéni döntésektől való függése aszerint alakul, hogy milyen ennek az y -nak a populációbeli eloszlása. Ha y normális eloszlást követ, és y^* állandó ütemben csökken, akkor az adoptálók számának időbeli alakulása S-görbét követ.

A fenti y^* küszöbérték, vagy más szóval *kritikus tömeg* bármilyen innováció diffúzióját befolyásolhatja. Hatása azonban különösen erős lehet az úgynevezett *interaktív* innovációk esetében. Jól ismert példa, hogy ha valaki a világon egyedül birtokol telefont, ez a kiválasztottság felemelő érzésével töltheti ugyan el, arra azonban amire a készüléket

⁸ Magánál Granovetternél a küszöb az egyes individuumok számára, sok esetben a valamilyen cselekvést követő, például egy innovációt már adoptáló többi individuum száma.

kitalálták, telefonálásra biztos, hogy nem használhatja. E példának megfelelően általában *hálózati hatásról* beszélhetünk, ha egy jószág vagy szolgáltatás minőségi tulajdonsága már attól önmagában értékesebb lesz, hogy a felhasználók száma növekszik. Egy ilyen, például interaktív innováció esetében fontos lehet, hogy már hányan használják. Ebből következik, hogy a jószág későbbi felhasználója több hasznot realizál, mint a korai felhasználók. A kezdeti szakaszban a diffúzió rendkívül lassú lesz. A kritikus tömeg a populációnak az a részaránya, amely után a folyamat már önfenntartó. Világos, hogy ugyanazok a tényezők, amelyek a kritikus tömeg elérése előtt lassítják, utána már gyorsítják a diffúzió sebességét⁹. A hálózati hatás tehát erősen befolyásolja az S-görbe pontos alakját.

Érdekes további kérdés lehet, hogy miért is akarna bárki egy innovációt a kritikus tömeg előtt alkalmazni? Láttuk azonban a kritikus tömeg egyéenként változik. Van, akinél ez a küszöb szinte nulla (ők lennének talán a Rogers-féle az újítók?), s van akinél nagyon magas lehet (megtaláltuk a lemaradókat?).

8.2. Populációsűrűség-függő modellek

Fertőzési-, illetve kritikustömeg-modellek. Ez a két alapvető modellcsalád nyújtott eddig elméleti háttérrel az S-görbék bevezetéséhez. Legalábbis explicit módon. Implicit módon ugyanis már a második fejezetben a logisztikus függvény bevezetése során is egy széles körben használatos elméleti elképzelésre támaszkodtunk. Azzal ugyanis, hogy a logisztikus függvényt valamely „szaporodási folyamat” rendelkezésére álló tér korlátozott jellegéből vezettük le, a logisztikus modellt a populáció ökológiában széles körben használatos *sűrűségfüggő* növekedési modellek egyikeként vezettük be.

Ezekben a modellekben valamely populáció létszámának növekedése a populációsűrűség függvényeként alakul. Ennek növekedése során a születési ráta csökkenése és/vagy a halálzási ráta emelkedése révén lassul a növekedés. Az

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

modell tehát matematikai formáját tekintve pontosan megegyezik az információterjedési modellel. Fontos különbség azonban, hogy itt a növekedési sebességet, a születési és

⁹ Persze itt nem az a kérdés, hogy tényleges hány felhasználó van, hanem az hogy mennyit „látnak”, mit gondolnak arról, hogy mennyi van. Akárcsak a hallgatás spirálja esetében, ezúttal is a láthatóság, és a percepció a fontos.

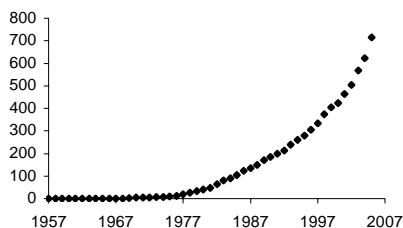
halálozási rátákon keresztül, nem egy információterjedési folyamat, hanem a populációsűrűség szabályozza.

A sűrűségfüggő növekedési modelleknek figyelemre méltó kiterjesztését képviselik a szervezetökológiában megjelent új elképzelések. (Hannan és Freeman 1989. illetve Hannan és Carroll 1992.) Az elmélet a szervezetek szaporodási mechanizmusának megragadására két fogalommal a versennyel és a legitimációval operál. Adott esetben az erőforrások korlátozhatják az adott térben elférő, pontosabban megélni és túlélni képes szervezetek számát. Márpedig korlátozott erőforrások mellett a verseny mindig fellép. Másfelől a legitimáció az a folyamat, amelynek során egy új típusú szervezet elfogadást nyer, intézményesül. A legitimáció folyamatosan lebontja az új szervezetek előtt álló akadályokat, megemeli a „születési rátáikat”, és javítja túlélési esélyeiket. Ezzel párhuzamosan azonban a szervezetek számának növekedésével erősödik az erőforrásokért folytatott verseny, ami a születési ráták csökkenését és a halálozási ráták növekedését eredményezheti. Heurisztikusan így belátható, hogy ezek a sűrűségfüggő növekedési modellek is valamiféle S-görbéhez vezetnek.

9. Társadalmi diffúzió, társadalmi változás

Az eddigiek során lényegében csak a szűkebb értelemben vett technológiai innovációk terjedési folyamataival foglalkoztunk. Példáink a hibrid kukorica terjedésétől, az Internet felhasználók körének bővülésén keresztül, a mobil szolgáltatások diffúziójáig terjedtek. Egy innováció azonban nyilvánvalóan nem csak valamilyen tárgyban megtestesülő technika, hanem gondolat, sőt cselekvés is lehet. A diffúziós megközelítés ennyiben a társadalmi változás megértésének egyik igen hatékony eszközét nyújthatja. Olyannyira, hogy sokan ennek kapcsán már egy diffúziós paradigma kialakulásáról beszélnek.

Tény, hogy a hatvanas évektől a diffúzióval foglalkozó irodalom rohamos növekedésnek indult. Magunk mindezt az Elsevier adatbázisából származó hevenyészett gyűjtéssel illusztráljuk (29. ábra), s az is igaz, hogy nem csak mennyiségi növekedéssel, hanem hihetetlen tematikus gazdagsággal is van dolgunk.



29. ábra

Az innovációk diffúziójával kapcsolatos cikkek kumulált száma az Elsevier Science Direct adatbázisban, 1957-2000

A magunk részéről ennek bizonyításához tanulmányunk befejező részében egy átfogó, de mégiscsak *illusztratív* jellegű tabló bemutatásával kívánunk hozzájárulni. Nem elemzés, inkább csak egyfajta képtár, amely a logisztikus függvény változatos alkalmazási területein próbál végigkalauzolni bennünket.

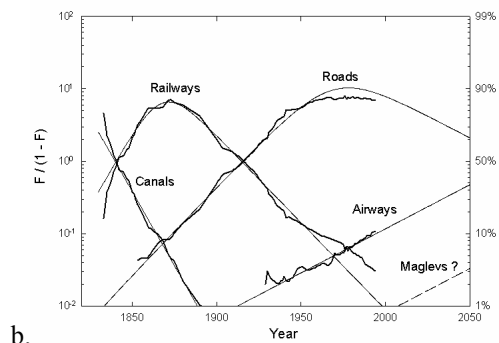
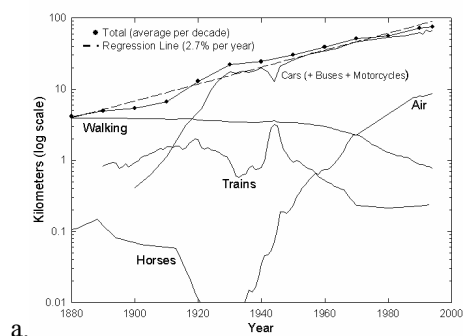
Nem kétséges, hogy e tekintetben elsősorban az ausztriai Laxemburgban működő International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA) munkatársai érdemlik ki figyelmünket. Elsőként Cesare Marchetti nevét említenénk, aki a hetvenes évek elején a General Electric New York-i tanácsadójaként már megismerkedett Fisher és Pry 1971-es tanulmányával a technológia változás terén megfigyelhető helyettesítési folyamatokról. Ennek nyomán Laxemburgban a hidrogén- és a nukleáris-energia jövőbeni szerepe kapcsán, az energiapiacok elemzésére kezdte alkalmazni a logisztikus elemzés eszköztárát.

A laxemburgi intézet másik nagyágyúja Nebojsa Nakicenovic szintén a hetvenes évek elején folytatott kutatásai során jutott arra a következtetésre, hogy az energiarendszerek fejlődése néhány igen tartós tendenciát mutat, s ezek közül is az egyik legfontosabb és legállandóbb a széntől való fokozatos megszabadulás, az úgynevezett decarbonizáció folyamata. A hetvenes évek első felében az energiarendszerek, és az infrastruktúra terén külön-külön folytatott kutatásaik után, 1979-ben publikálták korszakos jelentőségű közös munkájukat az energiarendszerek terén megfigyelhető *logisztikus helyettesítési* folyamatokról¹⁰.

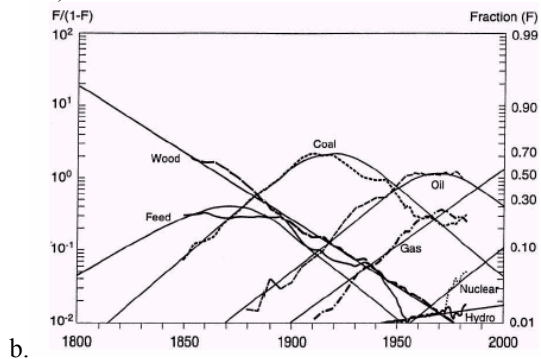
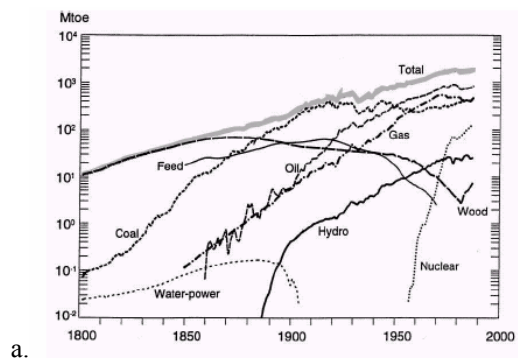
A 30-32. ábrák figyelmesebb tanulmányozásából kiderül, hogy eredményeiket, anélkül hogy ezt akkor külön kiemeltük volna már eddig is felhasználtuk. Az ábrák baloldali részében szereplő diagramokat ugyanis a 6-8. ábrákban már közöltük. Akkor azt kívántuk bemutatni velük, hogy az egymást követő innovációs lökeshullámok hatása miként képes fokozatosan

¹⁰ Szubjektív megítélésem szerint már mindkettejük mögött Nobel díjra érdemes életmű áll. Ehhez képest rendkívül meglepő, hogy a magyar nyelvű irodalomban csak egy tanulmány (Fleischer 2005) és egy a Daedalus

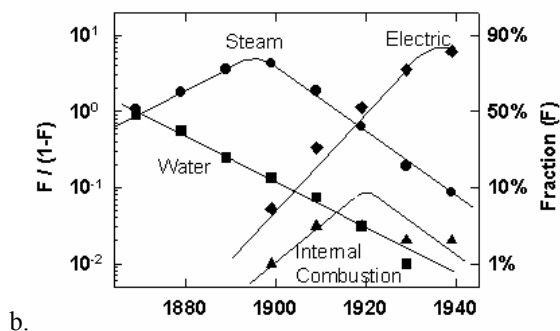
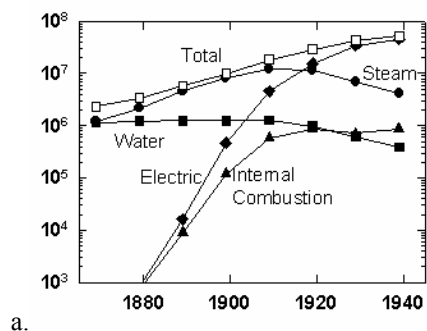
úgy kitágítani a teret, hogy helyet csináljon egy állandó ütemű exponenciális növekedés számára.



30. ábra
Közlekedés: Exponenciális burkoló és logisztikus helyettesítés
Forrás: Ausubell, Marchetti, Perrin 1998



31. ábra
Elsődleges energiaforrások: Exponenciális burkoló és logisztikus helyettesítés
Forrás: Grübler és Nakicenovic 1999.



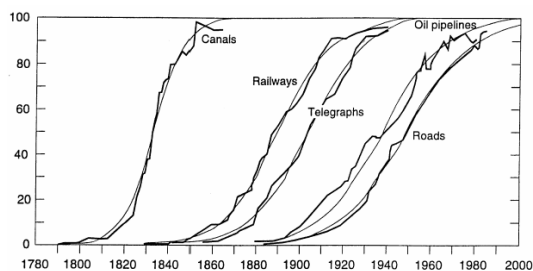
32. ábra
Elektromos energia források: Exponenciális burkoló és logisztikus helyettesítés
Forrás: Ausubell és Marchetti, 1996.

című folyóirat környezetvédelmi különszámát bemutató recenzió (Lakner 1997.) hivatkozásai közt találkozhattam a nevükkel.

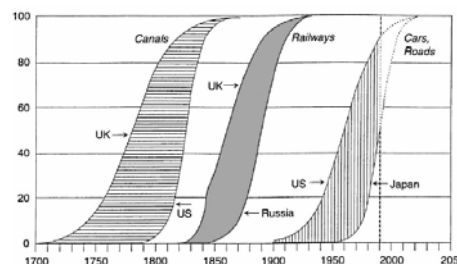
Az újdonságot ezúttal a fenti ábrák jobboldala képviseli. Ezekben ugyanis ugyanazokat a folyamatokat ábrázoltuk, mint baloldalt, csak már nem abszolút számokban. A 30.b-32.b ábrákon az egyes közlekedési eszközöknek és energiaforrásoknak a teljes közlekedési- vagy energia-kínálathoz viszonyított részesedését vetettük alá a Fisher-Pry transzformációnak. Mivel ebben az ábrázolásban az emelkedő illetve csökkenő egyenesek logisztikus növekedést illetve logisztikus csökkenést képviselnek, az ábrákon látható változatos domborzat úgynevezett *logisztikus helyettesítési folyamatok* egymást átfedő, illetve követő sorozatát mutatja be. A 31.b ábrán például a fa, mint energiaforrás szerepe több mint egy évszázada logisztikus csökkenő pályát követ. A fának ez az évszázados relatív háttérbeszorulása a szén, a kőolaj és a földgáz egymás követő, de egy jó ideig egymást átfedő, és párhuzamos előretörésének köszönhető. Figyelemre méltó, hogy az adatok szerint a szén valamikor a múlt század húszas éveiben, a kőolaj és a földgáz pedig, a hetvenes években jutott túl részesedése csúcspontján.

A 31.b ábrán látható fordulópontoknak a huszadik század két legjelentősebb gazdasági válságával, valamint az úgynevezett Kondratiev-ciklusok fordulópontjaival való meglepő egybeesése a „*hosszú hullámok*”-kal kapcsolatos irodalom hihetetlen mértékű fellángolását indukálta. A vitához, amely az innovációk és hosszú hullámok közti kapcsolat elemzésétől, a technológiák versengő helyettesítésén keresztül, a politikai ciklusokig illetve a „baby boom” generációk gazdasági szerepének elemzéséig terjed természetesen az IIASA munkatársai – Marchetti (1986), Grübler, Nakicenovic, és Viktor, (1999) – is hozzátették a magukét.

A 33. ábrán a három legfontosabb közlekedési hálózat a csatornák, a vasút, és a szilárd burkolatú utak innovációs hullámainak időbeli alakulását ábrázoltuk, az Egyesült Államok esetében. Megjegyezzük, hogy az ábra nem az abszolút számokat, hanem az egyes hullámok saturációs szintjéhez viszonyított relatív részesedéseket mutatja be. Figyelemre méltó, hogy az innovációs hullámok a Kondratiev ciklusoknak megfelelő, mintegy félévszázados késleltetéssel követték egymást. Megjegyezzük, hogy a vasút és a táviratok, valamint az utak és az olajvezetékek erősen szinkronizálnak ható időbeli dinamikája valamiképpen a közlekedés és a „kommunikáció” egymást kiegészítő mély kapcsolatára utal. Az előbbiekhöz hasonló S-görbékre, és szabályokra bukkanhatunk más országok esetében is, miközben néhány későn induló ország esetében e téren igen sikeres felzárkózás (34. ábra) figyelhető meg.



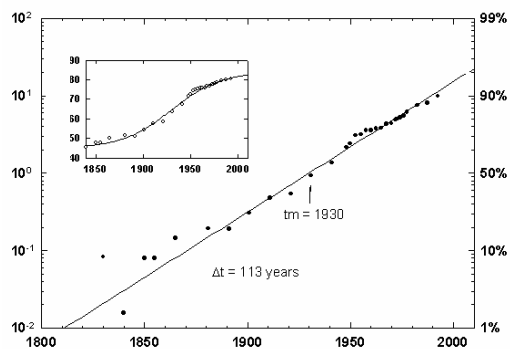
33. ábra
Közlekedési infrastruktúrák diffúziója az USA-ban
Forrás: Grübler, Nakicenovic, és Viktor, 1999.



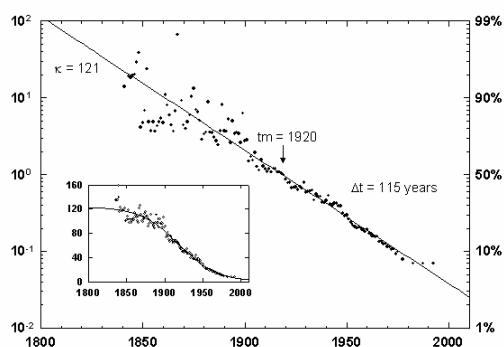
34. ábra
A későn indulók felzárkózása
Forrás: Grübler, Nakicenovic, és Viktor, 1999.

A kutatások a hosszú hullámok terén jelenleg is intenzíven folynak. Legutóbb például a Schumpeter féle teremtő rombolás fogalmkörére és Marchetti illetve Nakicenovic empirikus munkáira támaszkodva álltak elő egy evolúciós gazdasági növekedési modellel (Silverberg, Lehnert 2003). Mindez azonban túlságosan is fontos témakör ahhoz, hogy akár csak néhány mondat erejéig belevágjunk az elemzésébe, inkább maradunk a logisztikus növekedés alkalmazásainak általunk beígért arcképcsarnokánál.

Mivel, az emberi populáció dinamikájára vonatkozó példák az exponenciális és a logisztikus növekedés társadalomtudományi alkalmazásaiban történetileg is komoly szerepet játszottak, érdemes ezeket most néhány újabb eredménnyel kiegészítenünk.



35. ábra
Norvégia, a születéskor várható élettartam alakulása 1840-1990.
Forrás: Marchetti, C., Perrin S. Meyer, Jesse H. Ausubel 1996.



36. ábra
Norvégia, a csecsemőhalandóság alakulása 1850-1990.
Forrás: Marchetti, C., Perrin S. Meyer, Jesse H. Ausubel 1996.

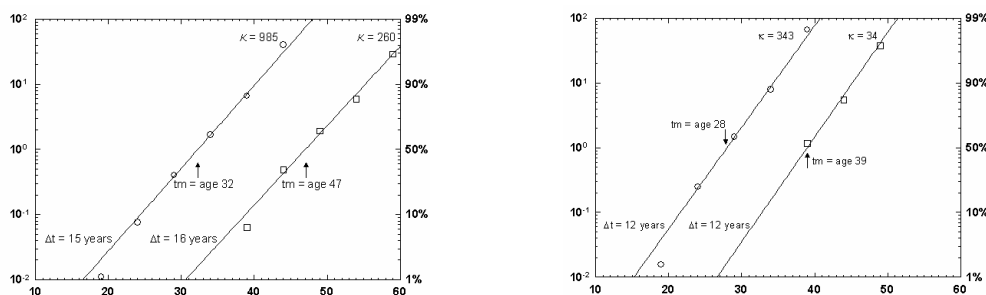
A 35. ábráról leolvasható, hogy a születéskor várható élettartam Norvégiában egy olyan 113 évig tartó logisztikus növekedést követett, amely 1930-ban jutott túl a középpontján, s amely napjainkra érkezett el a 84 éves saturációs szint közelébe. Az itt látható alkalmazás egyik figyelemre méltó tanulsága, hogy a logisztikus függvény pontos illesztéséhez a diagramot a függőleges tengely mentén 39 egységgel feljebb kellett tolni. Az ok nyilvánvaló. Ez a több mint százéves folyamat ugyanis nem a nulláról indult. A folyamat kezdetén, a 19. század első

harmadában a születéskor várható élettartam Norvégiában 39 év volt, s a logisztikus növekedés jóvoltából ehhez adódott hozzá még további 45 év.

Demográfusok között általában közmegegyezés van a tekintetben, hogy a születéskor várható élettartamok számos országban megfigyelhető növekedése nagyrészt a csecsemőhalandóság tartós és jelentős csökkenésének köszönhető. A 36. ábra azt mutatja, hogy Norvégiában, ebben az esetben egy 115 éves logisztikus csökkenéssel van dolgunk, amely napjainkra szintén a saturációs szint közelébe érkezett.

Marchetti, Perrin és Ausubel 1996-os közös tanulmányukban kimutatták, hogy se szeri se száma a legkülönbözőbb országok születési, halálozási illetve szaporodási rátáikkal kapcsolatos logisztikus növekedési folyamatoknak. Világos, hogy mindezek a logisztikus függvények az orvostudomány eredményeivel, illetve az életmód fokozatos megváltozásával kapcsolatba hozható diffúziós folyamatokat ragadnak meg.

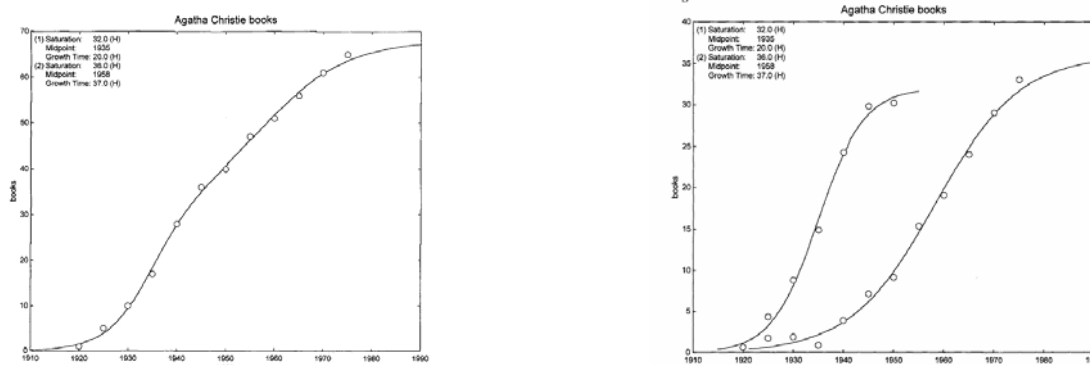
Különösen érdekes eredményekre jutunk, ha a gyermekek számának alakulását, a szokástól eltérően nem az anya, hanem az apa életkora szerint vizsgáljuk. A 37. ábráról kiderül, hogy akár Egyiptomot, akár Kanadát vesszük szemügyre mindkét esetben nagyon hasonló bi-logisztikus növekedésre bukkanunk. A 37. ábra baloldalán látható, hogy Egyiptomban a gyermekek első hullámát egy olyan mintegy 15 évig tartó logisztikus növekedés írja le, amelynek középpontja az apák 32 éves kora táján következik be. Megfigyelhető azonban egy második hullám is, amelynek során a gyermekek többsége az apák 47 éves korában jön a világra. Érteni véljük, hogy Egyiptomban a muzulmán férfiak ekkora engedhetik meg maguknak, hogy második feleséget hozzanak a házhoz, s a gyermekek második hulláma már ettől az új feleségtől származó gyermekeket jelenti. Rendkívül figyelemre méltó, hogy a többnejűség mellett, egy egészen más jogi intézmény a szabad válás lehetősége is teljesen hasonló demográfiai eredménnyel járhat. Feltételezhető ugyanis, hogy Kanadában a válás után újrահázasodó férfiak második feleségének gyermekvállalása eredményezi a produktivitás ott is megfigyelhető bi-logisztikus formáját.



37. ábra

Gyermekek száma az apa életkora szerint Egyiptomban és Kanadában
 Forrás: Marchetti, C., Perrin S. Meyer, Jesse H. Ausubel 1996.

A produktivitás és a logisztikus növekedés kapcsolatát egyébként Marchetti 2002-ben írt *Productivity versus Age* című művében már-már metafizikai szintre emelte. Mintegy száz oldalon keresztül Nobel díjas fizikusok, kémikusok, orvos biológusok, a legkülönbébb filmrendezők és producerek, híres bűnözők illetve bünszervezetek, futó- és dobóatléták valamint, zenészek, festők, írók sokaságának a – műveik kumulatív számán keresztül mért – teljesítményéről állítja, hogy logisztikus növekedés követ. Igazság szerint némely esetben Marchetti vizsgálódása inkább csak kvázi-empirikusnak vagy heurisztikusnak tekinthető. A rendelkezésére álló adatok száma nem ritkán nyugtalanítóan kevés. Sokszor teljesen figyelmen kívül hagyja, hogy az általunk megismert egyéb növekedési függvények sokkal jobb illeszkedést adhatnának. Minden esetben szinte apriori jelleggel ragaszkodik a logisztikus függvényhez. A diagramok sokaságából mi most csak ízelítőként közöljük az Agatha Christie-re vonatkozókat (38. ábra), amelyek ezúttal egy olyan szintén bi-logisztikus növekedés léte mellett tanúskodnak, amelynek egyes hullámai 1935-ös illetve 1957-es középponttal rendre 20 illetve 37 évig tartottak.

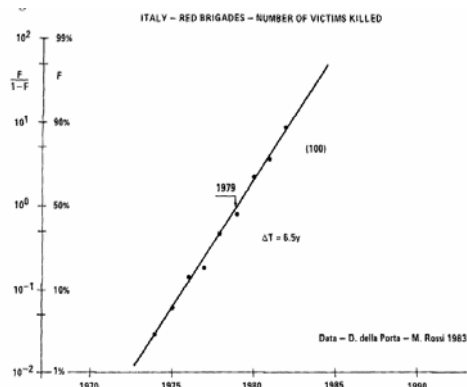


36. ábra

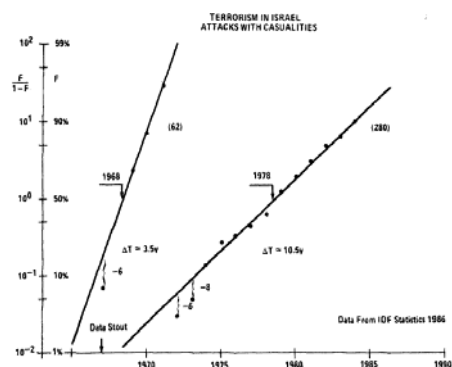
Agatha Christie könyveinek száma az életkora függvényében

Forrás: Marchetti 2002

A terroriszervezetek produktivitását viszont az általuk elkövetett terrorcselekmények számának időbeli alakulásával mérhetjük. Ezt tesszük az olaszországi, valamint az izraeli terror alakulását bemutató 1979-es középpontú logisztikus, illetve az 1968-as és 1978-as középpontú bi-logisztikus függvényekkel (39-40. ábrák).

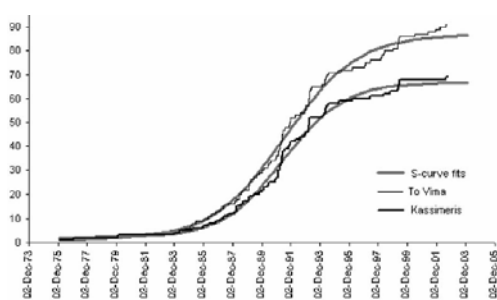


39. ábra
A Vörös Brigádok halálos áldozatainak száma
Forrás: Marchetti 2002

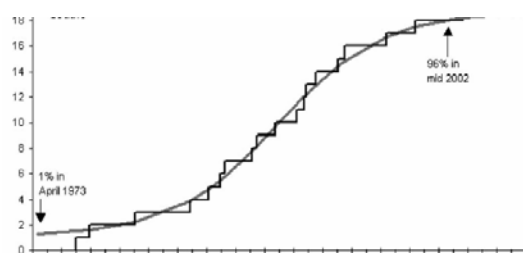


40. ábra
Terrortámadások száma Izraelben
Forrás: Marchetti 2002

A fenti példák átvezetnek bennünket egy a 2004-es athéni olimpia előkészületei idején a görög és a nemzetközi sajtóban is széles körben tárgyalt kérdéskörhöz. Ismert, hogy Görögországban a hetvenes évek közepe óta létezett egy baloldali gyökerű, November 17 nevű városi terrorszervezet. Akármilyen meglepő is, de tény, hogy a szervezett mintegy három évtizedes története alatt a rendőrségnek egyetlen tagját sem sikerült elfognia. 2002 nyarán aztán egy véletlen baleset játszotta a szervezet tagjait a bűnüldöző szervek kezére. A terrorszervezet akcióit bemutató 41-42. diagramokról azonban világosan kiderül, hogy amikor a rendőrség e véletlen szerencse folytán végre elfogta a szervezet tagjait, addigra annak aktivitása gyakorlatilag már véget is ért.



41. ábra
A November 17 terrorszervezet akcióinak száma
különböző görögsajtótermékek tudósításai szerint
Forrás: Konstandopoulos és Modis 2003.

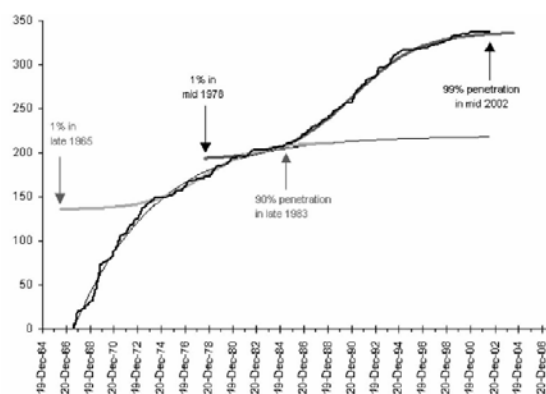


42. ábra
A November 17 terrorszervezet halálos áldozatokkal járó akciói
Forrás: Konstandopoulos és Modis 2003.

A November 17. terrorszervezet múltbeli gyökereit keresve nyilvánvalóan a Görögországban 1967-ben hatalomra jutott jobboldali katonai diktatúra elleni városi gerilla akciókig kell visszanyúlnunk. A 43. ábráról látható, hogy az így meghosszabbított idősorra egy tri-logisztikus függvényt illeszthetünk. Ez érdekes, de semmiképpen sem szemléletformáló

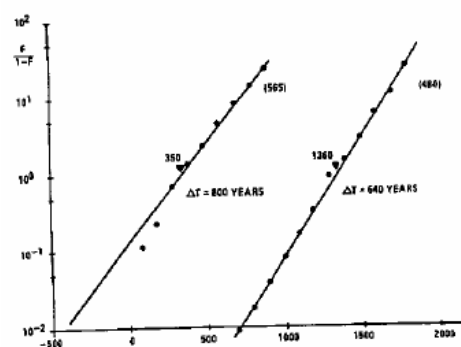
eredmény. Ennél sokkal figyelemre méltóbb, hogy közben a logisztikus függvény alkalmazásának egy újabb trükkjét ismerhettük meg. Látható ugyanis, hogy a pontos illesztés érdekében az első hullámot jelképező logisztikus függvény kezdetét a szerzők vissza kellett, hogy tolják – nem is kevéssel, mintegy fél évszázaddal, egészen pontosan 1919-ig – a múltba.

Mi is hasonló megoldást alkalmaztunk a Tilos Rádióval kapcsolatos sajtó aktivitás jellemzésére, igaz mi csak alig száz nappal toltuk vissza logisztikus függvényünket. Hogy ez sok vagy kevés az nyilván éppen a vizsgált jelenség időbeli hatókörének függvénye. Az általam ismert legstabilabb európai szervezet a katolikus egyház esetében például mintegy két évezred produktívitásának valamiféle mérésére ad lehetőséget, ha születési idejük szerint számban vesszük az egyház szentjei kumulatív számának időbeli alakulását. A diagramokat összeállító Marchetti két egymást részben átfedő, nyolcszáz illetve hatszáz éves növekedési idejű logisztikus függvényből álló bi-logisztikus növekedést talált, de az első hullám illesztéséhez a logisztikus függvényt neki is mintegy ötszáz(!) évvel kellett a múltba visszatolnia (44. ábra). A szerző ennek – persze utólag – magyarázatát is adja, amennyiben egy akkor tevékenykedett Jehova Szolgái elnevezésű szektában Jézus szellemi elődeit is megtalálni vélte.



43. ábra

Városi gerilla akciók Görögországban
Forrás: Konstandopoulos és Modis 2003.



44. ábra

A katolikus egyház szentjeinek száma
Forrás: Marchetti 1994.

Nem tudom, hogy követhetjük-e szerzőnket ezen az úton. Itt ugyanis a logisztikus függvény iránti olyan feltétlen, szinte apriori bizalommal van dolgunk, amelyet csak nagyon nyomós érvek mellett lennének hajlandók elfogadni. Egyáltalán nem magától értetődő, hogy lehet-e, vagy érdemes-e kétezer év bármiféle folyamatát néhány egyszerű függvénybe belesűríteni. A gond az, hogy e példa esetében nem igazán tudjuk eldönteni, hogy tényleg látunk, vagy csak

módszerünk fénytörésében belelátunk a jelenségbe valamit? Ez a kérdés azonban visszarepít bennünket tanulmányunk legalapvetőbb problémájához.

– Telítődési folyamat? – Igen. – S-görbe? – Hm, ... iiigen. – Rendben, de akkor melyik!?

Pontosan ezekkel a kérdésekkel szembesültünk magunk is a *kettős állampolgárság* magyarországi sajtódinamikájának elemzése során. A válaszokat a jelen tanulmány teljes eszköztárának felhasználásával igyekszünk megtalálni, az eredményekről azonban természetesen csak egy következő publikációban áll módunkban számot adni.

Matematikai függelék

ⁱ A logisztikus függvény képlete.

Egy kicsit tovább részletezve az eredményt, ha N_0 jelöli a populáció kezdeti értékét, akkor az (5)

formulából közvetlenül $N = \frac{KN_0}{(K - N_0)e^{-rt} + N_0}$ adódik. A számlálót és a nevezőt is elosztva N_0 -al

$$N = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt} + 1} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}, \text{ majd } A = \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) \text{ jelölés bevezetésével}$$

$N = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$. Ez már majdnem megegyezik a (6) formulával. Innen ugyanis $A = e^{\ln A}$ miatt,

$$N = \frac{K}{1 + e^{\ln A} e^{-rt}} = \frac{K}{1 + e^{-rt + \ln A}}, \text{ majd bevezetve a } b = -\ln A \text{ jelölést, megkapjuk a (6) formulát.}$$

ⁱⁱ A logisztikus függvény, mint S-görbe.

Világos, hogy a függvény viselkedése a nevezőben szereplő e^{-rt-b} exponenciális kifejezéstől függ. Ha a folyamat kezdeteit keresve egyre jobban merülünk el a múltba, azaz t minél nagyobb negatív értéket vesz fel, az e^{-rt-b} exponenciális tag értéke minden határon túl nő, következésképpen az N logisztikus függvényt megadó tört értéke aszimptotikusan nullához fog közelíteni. Fordítva, ha t plusz végtelenhez, akkor e^{-rt-b} nullához, következésképpen N értéke, ahogy kell aszimptotikusan a K saturációs szinthez tart.

ⁱⁱⁱ Növekedési idő.

Jelölje t_1 és t_2 azokat az időpontokat, amelyekben a folyamat rendre a saturáció 10 illetve 90 százalékáig

jutott, azaz fennáll az $N(t_1) = \frac{K}{1 + e^{-rt_1-b}} = \frac{K}{10}$ illetve az $N(t_2) = \frac{K}{1 + e^{-rt_2-b}} = \frac{9K}{10}$ összefüggés.

Innen K -val egyszerűsítve, majd reciprokot véve $1 + e^{-rt_1-b} = 10$ illetve $1 + e^{-rt_2-b} = \frac{10}{9}$ adódik. Ezt

átrendezve és logaritmálva a $-rt_1 - b = \ln 9$ és a $-rt_2 - b = \ln \frac{1}{9}$ összefüggésekhez jutunk. Az

elsőből kivonva a második egyenletet és bevezetve a $\Delta t = t_2 - t_1$ jelölést $r\Delta t = 2 \ln 9$, innen pedig $r = \frac{\ln 81}{\Delta t}$ adódik.

^{iv} **Inflexiós pont.**

Ha t_m a középpont ideje, akkor $N(t_m) = \frac{K}{1 + e^{-rt_m - b}} = \frac{K}{2}$. Innen pedig csak le kell másolnunk a fenti levezetést, hogy $t_m = -\frac{b}{r}$ összefüggéshez jussunk.

^v **Fischer-Pry transzformáció.**

Az $N = \frac{K}{1 + e^{-rt-b}}$ egyenletből, mindkét oldalt beszorozva a nevezővel $N + Ne^{-rt-b} = K$. Ezt

átrendezve $Ne^{-rt-b} = K - N$, elosztva N-nel $e^{-rt-b} = \frac{K - N}{N}$, majd reciprokot véve

$$e^{rt+b} = \frac{N}{K - N}. \text{ Innen } e^{rt+b} = \frac{\frac{N}{K}}{1 - \frac{N}{K}} = \frac{F}{1 - F}, \text{ amit logaritmálva } rt + b = \ln \frac{F}{1 - F} \text{ áll elő.}$$

^{vi} **A Gompertz-függvény.**

A (12) egyenletből $\frac{dN}{N} = -ke^{at} dt$ adódik. Innen a logaritmus derivált tulajdonságát felhasználva, a

Newton-Leibnitz formula révén $[\ln N]_0^t = \left[-\frac{k}{a} e^{at} \right]_0^t$, majd $\ln N - \ln N_0 = -\frac{k}{a} e^{at} + \frac{k}{a}$, ahonnan

$\ln \frac{N}{N_0} = \frac{k}{a} - \frac{k}{a} e^{at}$. Ezt hatványozva $\frac{N}{N_0} = e^{\frac{k}{a} - \frac{k}{a} e^{at}}$, majd N_0 -al beszorozva

$N(t) = N_0 e^{\frac{k}{a} - \frac{k}{a} e^{at}}$ adódik. Bevezetve a $K = N_0 e^{\frac{k}{a}}$, és $b = \frac{k}{a}$ jelöléseket kapjuk az

$N(t) = Ke^{-be^{-at}}$ eredményt.

Megjegyezzük, hogy a Gompertz függvény is linearizálható, mivel fennáll az $\ln \ln \frac{1}{F} = \ln b - at$ összefüggés.

^{vii} **Bertalanffy-függvény.**

A kiinduló differenciálegyenlet $\dot{N} = r(K - N)$. Jelölje most $x = (K - N)$, akkor $dx = -dN$,

amit behelyettesítve a kiinduló egyenletbe $\frac{dx}{dt} = -rx$, illetve átrendezve $\frac{dx}{x} = -r dt$ adódik. Innen a

logaritmus derivált, illetve Newton-Leibnitz formula révén $[\ln x]_0^t = [-rt]_0^t$, $\ln x - \ln x_0 = -rt$.

A logaritmus tulajdonsága miatt $\ln \frac{x}{x_0} = -rt$, hatványozva $\frac{x}{x_0} = e^{-rt}$, majd beszorozva x-re

$x = -x_0 e^{-rt}$ adódik. Ebben visszahelyettesítve x definícióját áll elő a $K - N = (K - N_0) e^{-rt}$,

majd átrendezve az $N = K - (K - N_0) e^{-rt}$ egyenlet. Ebben az N_0 kezdőérték és az K végső érték

közti különbség exponenciálisan cseng le, amivel csakugyan a Bertalanffy-függvényhez jutottunk, és ha a kiinduló érték $N_0 = 0$, akkor $N = K(1 - e^{-rt})$, amivel a Mitscherlich-féle függvényt kaptuk.

viii **A testtömeg és a Bertalanffy-függvény.**

Tegyük fel, hogy $M = L^3$ azaz az M tömeg egyenlő az L testhossz köbével. A derivált tulajdonságai miatt ekkor fennáll a $dM = 3L^2 dL$ összefüggés. Az előbbi két egyenlőségből egyrészt $L = M^{\frac{1}{3}}$ másrészt $dL = \frac{1}{3L^2} dM = \frac{1}{3M^{\frac{2}{3}}} dM$ adódik, amiket visszahelyettesítve (20)-ba

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt} = 3rM^{\frac{2}{3}} \left(K^{\frac{1}{3}} - M^{\frac{1}{3}} \right) = 3rK^{\frac{1}{3}} M^{\frac{2}{3}} \left(1 - \left(\frac{M}{K} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$$

összefüggéshez jutunk, amit már könnyű a (21) alakra hozni.

ix **Második Gompertz modell.**

Az $\dot{N} = \frac{r}{\beta} N \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^{\beta} \right)$ formula $\frac{1}{K^{\beta}}$ kiemelésével a következő módon alakítható át.

$$\dot{N} = \frac{r}{\beta} N \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^{\beta} \right) = \frac{rN}{K^{\beta}} \left(\frac{K^{\beta} - N^{\beta}}{\beta} \right)$$

Itt a szorzatban szereplő első tört nevezője $\beta \rightarrow 0$ esetén egyhez tart, míg a zárójelben lévő kifejezés határátmenetben

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{K^{\beta} - N^{\beta}}{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{e^{\beta \ln K} - e^{\beta \ln N}}{\beta} = \ln \left(\frac{K}{N} \right),$$

x **A Gompertz-függvény második levezetése.**

Induljunk ki az $\dot{N} = \frac{dN}{dt} = rN \ln \left(\frac{N}{K} \right)$ (29) formulából. Ennek egyszerű átrendezésével

$$\frac{dN}{N \ln \left(\frac{N}{K} \right)} = r dt \quad (30)$$

adódik. Ha bevezetjük az $u = \ln \left(\frac{N}{K} \right)$ jelölést, akkor $du = \frac{1}{N} dN$ áll fenn. Ezt a két összefüggést visszahelyettesítve, a (30) összefüggés a $-\frac{du}{u} = r dt$ alakot ölti. Egyszerű

átrendezéssel kiderül, hogy u-ra valójában egy nagyon egyszerű $\frac{du}{dt} = -ru$, vagy ami ugyanaz

$\dot{u} = -ru$ alakú differenciálegyenletünk van. A Newton-Leibnitz formula felhasználásával ennek a

differenciálegyenletnek a megoldása $[\ln u]_0^t = -rt + c$, $\ln u - \ln u_0 = -rt + c$, $\ln \frac{u}{u_0} = -rt + c$,

majd hatványozva $\frac{u}{u_0} = e^{-rt+c}$, és beszorozva $u = u_0 e^{-rt+c}$ lesz. Ebbe ezután visszaírva az u-ra adott

definíciót, $\ln \frac{K}{N} = \ln \frac{K}{N_0} e^{-rt+c}$, majd reciprokot véve $\ln \frac{N}{K} = -\ln \frac{K}{N_0} e^{-rt+c}$ adódik, ahonnan

$$\frac{N}{K} = e^{-\ln \frac{K}{N_0} e^{-rt+c}}, \text{ beszorozva } N = K e^{-\ln \frac{K}{N_0} e^{-rt+c}},$$

$N = Ke^{-\ln \frac{K}{N_0} e^c e^{-rt}}$, majd $b = \ln \frac{K}{N_0} e^c$ jelöléssel, a Gompertz függvény $N = Ke^{-be^{-rt}}$ alakú már megismert formájához jutunk.

Felhasznált irodalom:

- Ausubel Jesse H., Cesare Marchetti, és Meyer Perrin: Toward green mobility: the evolution of transport, *European Review*, Vol. 6, No. 2, 137-156 (1998).
- Ausubel Jesse H.: Can Technology Spare the Earth?, *American Scientist Magazine*, 84(2): 166-178 1996.
- Ausubel, Jesse H., és Cesare Marchetti: Electron: Electrical System, *Daedalus*, 125(3): 139-169. Summer 1996.
- Banks B. Robert: Growth and Diffusion Phenomena: Mathematical Frameworks and Applications, Springer-Verlag, New York 1994.
- Bass M. Frank: A new product growth for model consumer durables, *Management Science* Vol. 15. No. January, 1969.
- Bewley Ronald, William E. Griffiths: The penetration of CDs in the sound recording market: issues in specification, model selection and forecasting, *International Journal of Forecasting* 19 (2003) 111-121.
- Botelho, Anabela, and Ligia Costa Pinto: The diffusion of cellular phones in Portugal, *Telecommunications Policy* 28 (2004) 427-437
- Carillo Marianela and José M. González: A new approach to modeling sigmoidal curves, *Technological Forecasting and Social Change*, 69 (2002) 233-241.
- Coleman S. James, Herbert Menzel és Elihu Katz: *Medical Innovation: A Diffusion Study*, 1966. Indianapolis, Bobbs-Merill
- Cramer J. S.: The early origins of the logit model, *Studies in History and Philosophy of Biological and Biomedical Sciences*, 35 (2004) 613-626.
- David, Paul, A.: Zvi Griliches on Diffusion, Lags and Productivity Growth ... Connecting the Dots, Conference on R&D, Education and Productivity Held in Memory of Zvi Griliches (1930-1999), 25-27th, August 2003.
- Dekimpe Marnik G., Philip M. Parkes and Miklos Sarvary: Staged Estimation of International Diffusion Models, *Technological Forecasting and Social Change*, 57 105-132, 1998.
- Deroian, Frédéric: Formation of social networks and diffusion of innovations, *Research Policy* 31 (2002) 835-846
- Dessewffy Tibor – Galács Anna: Mobilkommunikáció és társadalmi diffúzió
- Devezas Tesseleno: The Growth of the Internet

Ferreira, Omar Campos: Futurology

Fisher, J.C. és Pry, R.H: A Simple Substitution Model of Technological Change, *Technological Forecasting and Social Change*, 3 75-88, 1971.

Fleischer Tamás: Fenntartható közlekedés és infrastruktúra. A fenntartható fejlődés háttér tanulmánya, 2005. szeptember 18.

Fokasz Nikosz és Fokasz Oresztész: Hullámverés, Terjedési folyamatok a médiában, *Szociológia Szemle*, 2004/4

Formoso, Carl: Hazard Rates from Competing/Repeated Risk Survival Analysis *Technological Forecasting and Social Change*, 72(1): January, 2005.

Geroski, P. A.: Models of technology diffusion, *Research Policy* 29 (2000) 603-625

Grandcourt E. M., T. Z. Al Abdessalaam, F. Francic, A.T. Al Shamsi: Population biology and assessment of the orange-spotted grouper, *Epinephelus coioides* (Hamilton, 1822), in the southern Arabian Gulf, *Fisheries Research* 74 (2005) 55-68.

Gruber Harald, és Frank Verboven: The diffusion of mobile telecommunications services in the European Union, *European Economic Review* 45 (2001) 577-588

Gruber Harald, és Frank Verboven: The evolution of markets under entry and standards regulation – the case of global mobile telecommunications, *International Journal of Industrial Organization* 19 (2001) 1189-1212

Gruber Harald: Competition and innovation, The diffusion of mobile telecommunications in Central and Eastern Europe, *Information Economics and Policy* 13 (2001) 19-34

Grübler Arnulf és Nebojsa Nakicenovic, David G. Viktor: Dynamics of energy technologies and global change, *Energy Policy* 27 (1999) 247-280.

Grübler Arnulf és Nebojsa Nakicenovic: Decarbonizing the Global Energy System, *Technological Forecasting and Social Change*, 53: 97-110. 1996.

Hannan M., Carroll, G.: *Dynamics of Organizational Populations*, Oxford University Press, Oxford, 1992.

Hannan M., Freeman, J.: *Organizational Ecology*, Harvard University Press, Cambridge, 1989.

Herman, Robert, Elliott W. Montroll: A Manner of Characterizing the Development of Countries, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 69. No. 10 3019-3023, October 1972.

Jang, Show-Ling, Shau-Chi Dai and Simona Sung: The pattern and externality effect of diffusion of mobile telecommunications: the case of OECD and Taiwan, *Information Economics and Policy* 17 (2005) 133-148.

Konstandopoulos, Athanasios G., and Theodore Modis: Urban guerilla activities in Greece, *Technological Forecasting and Social Change*, 10 May 2003.

-
- Kozuko, Frank, Zeljko Bajzer: Combining Gompertzian growth and cell population dynamics, *Mathematical Biosciences* 185 (2003) 153-167.
- Kratochvilová, M., L. Hyáková, H. Knizetová, J. Fiedler, F. Urban: Growth curve analysis in cattle from early maturity and mature body size viewpoints, *Czech J. Anim. Sci.*, 47 2002 (4) 125-132.
- Lakner Judit: A természet felszabadítása, *BUKSZ* 9. Évf. 2. szám, 1997. NYÁR
- Lei, Y. C. és S. Y. Zhang: Features and Partial Derivatives of Bertalanffy-Richards Growth Model in Forestry, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, Vol. 9, No. 1, 65-73, 2004.
- Liao C. Y., V.V. Podrázsky and G.B. Liu: Diameter and height growth analysis for individual White pine trees in the area of Koselec and Cernymi lesy, *Journal of Forest Science* 49 2003. (12) 544-551.
- Linstone H.A.: Corporate planning, forecasting, and the long wave, *Futures* 34 (2002) 317-336
- Mahler, Alvin and Everett M. Rogers: The diffusion of interactive communication innovations and the critical mass: the adoption of telecommunications services by German banks, *Telecommunication Policy* 23 (1999) 719-740
- Marchetti, Cesare, és Nakicenovic, N.: *The Dynamics of Energy Systems and the Logistic Substitution Model*, International Institute for Applied Systems Analysis, 1979
Laxenburg, Austria
- Marchetti, Cesare, Perrin S. Meyer, Jesse H. Ausubel: Human Population Dynamics Revisited with the Logistic Model: how much can be modeled and predicted? *Technological Forecasting and Social Change*, 52 10-302, 1996.
- Marchetti, Cesare: Anthropological Invariants in Travel Behavior, *Technological Forecasting and Social Change*, 47, 75-88. 1994.
- Marchetti, Cesare: Fifty-year pulsation in human affairs. Analysis of some physical indicators. *Futures* 17(3): 376-388. 1986.
- Marchetti, Cesare: Longevity and Life Expectancy, *Technological Forecasting and Social Change*, 55, 281-299. 1997.
- Marchetti, Cesare: Millenarian Cycles in the Dynamics of the Catholic Church, *Technological Forecasting and Social Change*, 55, 281-299. 1997.
- Marchetti, Cesare: Productivity versus Age, Final Report for Richard Lounsbery Foundation, June 2002.
- Marini Matteo: Cultural evolution and economic growth: a theoretical hypothesis with some empirical evidence, *Journal of Socio-Economics* 33 (2004) 765-784.
- Metcalfe J., S.: Ed Mansfield and the Diffusion of Innovation: An Evolutionary Connection, *Journal of Technology Transfer* 30 1/2 171-181, 2005

-
- Metcalf J., S.: Industrial Growth and the Theory of Retardation: precursors of an adaptive evolutionary economic change, ESDC Centre for Research on Innovation and Competition and School of Economic Studies University of Manchester
- Modelski, George and Perry Gardner: Democratization in Long Perspective, Technological Forecasting and Social Change, Vol. 39(1-2): 22-34, March-April 1991.
- Modelski, George and Perry Gardner: "Democratization in Long Perspective", revisited Technological Forecasting and Social Change, Vol. 69: 359-376, 2002.
- Modis, Theodore: The end of the internet rush, Technological Forecasting and Social Change, 2005.
- Modis, Theodore: Forecasting the growth of complexity and change, Technological Forecasting and Social Change, 69 377-404, 2002.
- Modis, Theodore: Genetic Re-Engineering of Corporations, Technological Forecasting and Social Change, 56 107-118, 1997.
- Modis, Theodore: Limits to Cycles and Harmony in Revolutions, Technological Forecasting and Social Change, 59 33-38, 1998.
- Modis, Theodore: Technological Forecasting at the Stock Market, Technological Forecasting and Social Change, 62 173-202, 1999.
- Mohamed Zaid, Pat Bodger: A comparison of Logistic and Harvey models for electricity consumption in New Zealand, Technological Forecasting and Social Change, 2004.
- Nakicenovic, N.: Decarbonization as a long-term energy strategy, In.: Yoichi Kaya és Keiichi, Yokobori (ed.) Environment, Energy, and Economy, United Nations University Press, 1997.
- Nieto Mariano, Francisco Lopéz and Fernando Cruz: Performance analysis of technology using S curve model: the case of digital signal processing (DSP) technologies, Technovation 18 (6/7) (1998) 439-457
- Perrin S. Meyer és Jesse H. Ausubel: Carrying capacity. A model with logistically varying limits, Technological Forecasting and Social Change, 61(3) 209-214, 1999.
- Perrin S. Meyer, Jason W. Yung and Jesse H. Ausubel: A Primer on Logistic Growth and Substitution: The Mathematics of the Loglet lab Software, Technological Forecasting and Social Change, 61(3):247-271, 1999.
- Perrin S. Meyer: Bi-Logistic Growth, Technological Forecasting and Social Change, 47 89-102, 1994.
- Rogers Everett: Diffusion of innovations and the Mega-Cities Project, The Mega-Cities Project Publication MCP-011, 1994.
- Rogers M. Everett: Diffusion of preventive innovations, Addictive Behaviors 27 (2002) 989-993
- Ryan, Bryce és Neal, C. Gross: The Diffusion of Hybrid Seed Corn in two Iowa Communities, Rural Sociology 1943, 8. 15-24.

-
- Silverberg, Gerald és Doris Lehnert: Evolúciós káosz: növekedés és fluktuációk az „alkotó rombolás” Schumpeter-féle modelljében In.: Fokasz Nikosz (szerk.): Káosz és nemlineáris dinamika a társadalomtudományokban, Typotex kiadó, 2003.
- Tabatabai, Mohamad, David Keith Williams and Zoran Bursac: Hyperbolic growth models: Theory and application, Theoretical Biology and medical modeling, marsh 2005.
- Thornley, John H. M., James France: An open-ended logistic-based growth function, Ecological Modelling, 184 (2005) 257-261
- Tsoularis A., J. Wallas: Analysis of logistic growth models, Mathematical Biosciences 179 (2002) 21-55.
- Vladar de, Harold P.: Density-dependence as a size-independent regulatory mechanism, Journal of Theoretical Biology, may 2005
- von Fircks Heinrich, Theo Verwijst: Plant Viability as a Function of temperature Stress, Plant Physiol. (1993) 103: 125-130.
- Wellock I.J., G.C. Emmans and I. Kyriazakis: Describing and predicting potential growth in the pig. 2004. British Society of Animal Science
- Zeide, Boris: Intrinsic units in growth modeling, Ecological Modelling 175 (2004) 249-259.